

# SUPRACONDUCTIVITE

Louis Dumoulin CSNSM Orsay

## Introduction

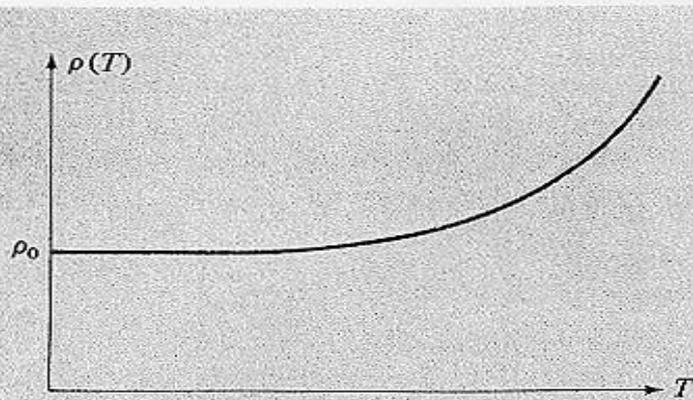
- Phénomène spectaculaire qui a marqué profondément la Physique des Solides
- Une propriété incontournable des très basses Températures
- Une place importante dans les détecteurs cryogéniques
  - utilisation de la transition normal-supra (TES)
  - exploitation de la particularité des excitations (STJ)
  - des dispositifs de mesure ultra-sensibles (SQUID)

## Plan

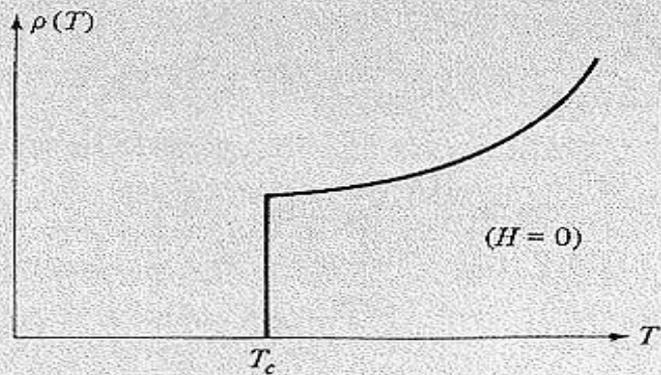
- I- Les propriétés de la transition et les caractéristiques de l'état supraconducteur.
- II- L'état fondamental BCS. Le spectre des excitations dans un supraconducteur: les quasi-particules.  
Vérifications expérimentales et applications.
- III- La cohérence de phase. Effet Josephson et applications.

# I- Propriétés fondamentales

## A- La conductivité parfaite



(a)



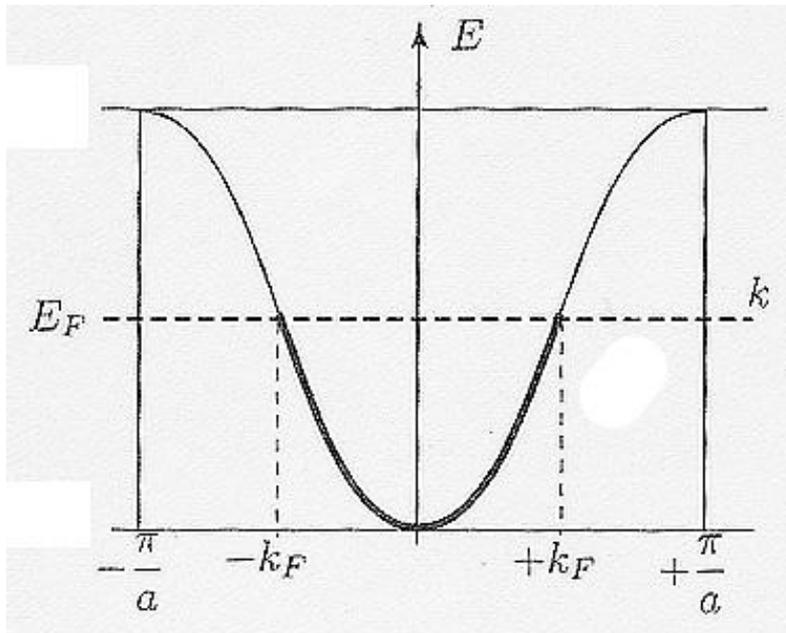
(b)

(a) Low-temperature resistivity of a normal metal ( $\rho(T) = \rho_0 + BT^5$ ) containing nonmagnetic impurities (b) Low-temperature resistivity of a superconductor (in zero magnetic field) containing nonmagnetic impurities. At  $T_c$ ,  $\rho$  drops abruptly to zero.

La découverte de  
H. Kamerling Onnes  
en 1911

# Rappel des propriétés des métaux à l'état normal

-Le modèle des électrons libres



$$\Psi = \Psi_0 e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \quad \text{avec } \hbar \vec{k} = \vec{p} = m \vec{v}$$
$$\text{soit } \vec{v} = \frac{\hbar \vec{k}}{m}$$

$$v_F = 10^6 \text{ m/s}$$

$$E = K_b T \quad E = h\nu = \hbar\omega \quad \omega = 2\pi\nu \quad \hbar = \frac{h}{2\pi}$$

## Origine de la résistance des métaux normaux

- Dans un potentiel parfaitement périodique,  $R = 0$
- Les écarts à la périodicité créent des diffusions.
- On peut les décrire comme des chocs électron-défauts à la fréquence

$$1/\tau$$

-Modèle de Drude

$$\sigma = \frac{ne^2\tau}{m}$$

$$l = v_F \tau$$

$\tau$  = Temps de relaxation

$n$  = nombre de porteurs

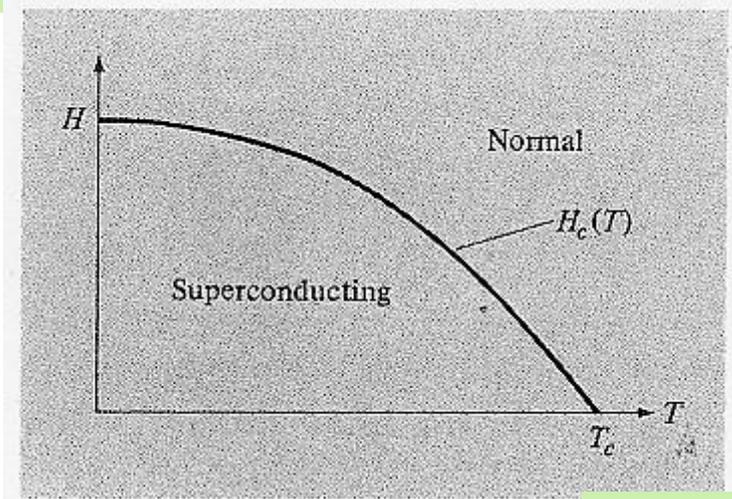
$l$  = libre parcours moyen

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{\tau_{ph}} + \frac{1}{\tau_{imp}}$$

**La supraconductivité est une réorganisation complète du gaz électronique**

# B- Le diamagnétisme parfait

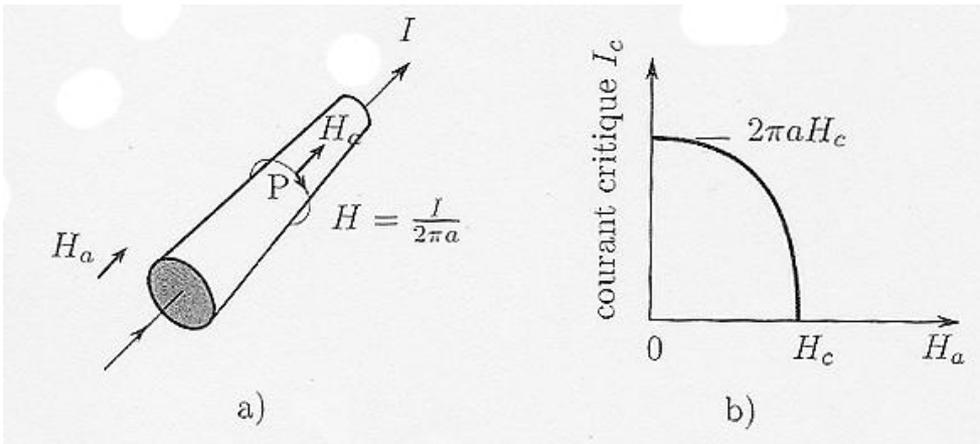
La supraconductivité est sensible aux perturbations magnétiques  
a-Champ critique



$$H_c(T) = H_c(0) \left[ 1 - \left( \frac{T}{T_c} \right)^2 \right]$$

(Forme empirique)

b-Courant critique



$$H_a = I / (2\pi a)$$

Règle de  
Silsbee

# Effet Meissner-Ochsenfeld

- un conducteur parfait s'oppose aux *variations* de flux
- un supraconducteur **expulse le champ magnétique** tant que  $H < H_c$

-cela lui coûte une énergie

$$E = \frac{1}{2} \mu_0 H_c^2$$

-il y a donc une « compensation » qui est l'énergie gagnée à créer l'état supraconducteur:

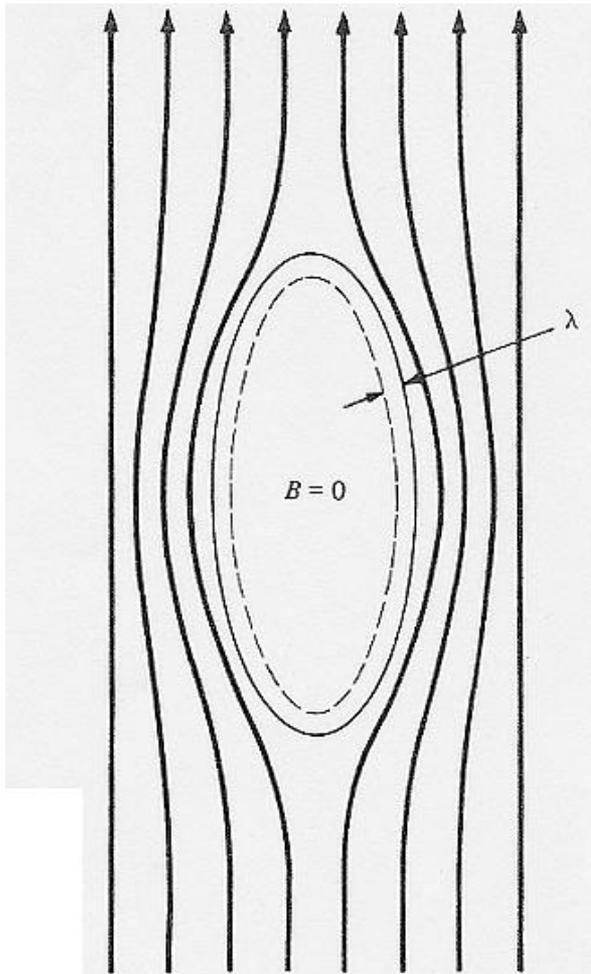
## L'énergie de condensation

-où passent les supercourants qui écrantent le champ?

-en régime stationnaire  $\text{rot } B = \mu_0 J$

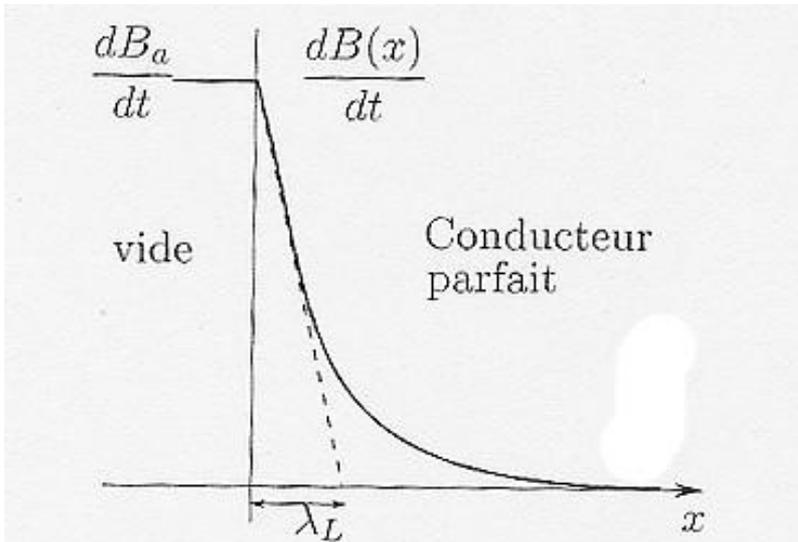
- Les courants sont donc confinés à une couche

superficielle d'épaisseur  $\lambda$  la longueur de **pénétration (London)** (50 nm)



Schematic diagram of exclusion of magnetic flux from interior of massive superconductor.  $\lambda$  is the penetration depth, typically only 500 Å.

# La profondeur de pénétration: signification



Variation de  $dB(x)/dt$  à l'intérieur du métal parfait obtenue lorsqu'une variation  $dB_a/dt$  du champ appliqué est imposée. Elle s'annule exponentiellement sur une distance  $\lambda_L$  qui correspond à l'épaisseur de la couche des courants superficiels.

-pour décrire le supraconducteur, London a proposé de remplacer  $dB/dt$  par  $B$  dans les équations de Maxwell

$$\lambda_L^2 = m_0 / n_s e^2 \mu_0$$

$\lambda_L$  est donc directement liée à la densité des porteurs supraconducteurs

- expérimentalement on mesure  $\lambda(T)$

$$\lambda(T) = \left[ 1 - \left( \frac{T}{T_c} \right)^4 \right]^{-1/2}$$

-donc 
$$n_s(T) = n(0) \left[ 1 - \left( \frac{T}{T_c} \right)^4 \right]$$

Le modèle dit « à deux fluides » est utile mais c'est une **représentation inexacte**

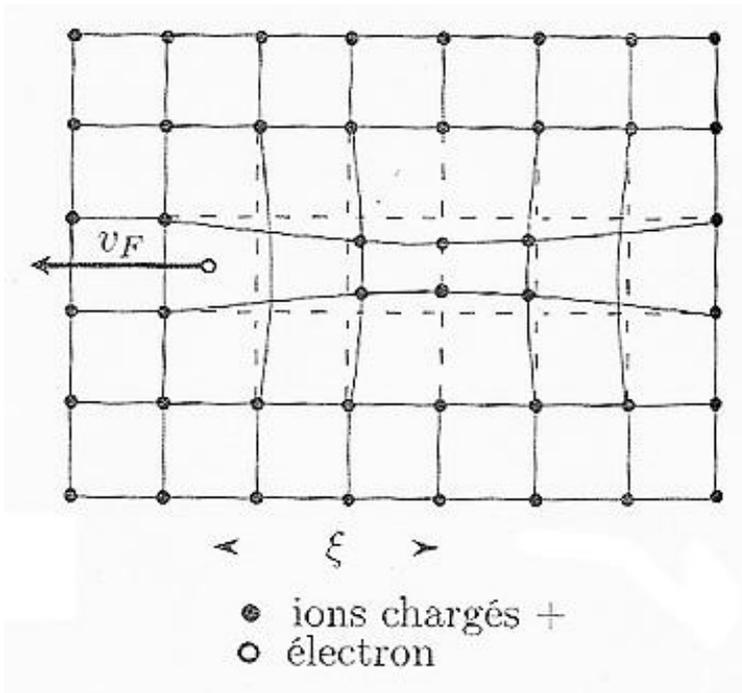
# C- Origine microscopique de la supraconductivité

L'origine de la supraconductivité est restée une énigme pendant près de 50 ans, jusqu'à la théorie microscopique de BCS en 1957

## a-Paires de Cooper

- Supposons une interaction attractive entre deux électrons!
- Gain d'énergie en les associant en paires:
  - de vecteurs d'onde (vitesses) opposés  $k$  et  $-k$
  - de spins opposés
- le gaz d'électron (la « mer de Fermi ») est alors instable : elle transite vers un **nouvel état quantique**

## b- Le mécanisme attractif par l'interaction électron-phonon



- La répulsion coulombienne écrantée
- Le rôle des ions positifs (effet isotopique)
- attraction effective d'un autre électron
- rendu possible car  $v_F \gg$  vitesse des ions
- tout le spectre des phonons donc jusqu'à  $\omega_D$
- violation de la conservation de l'énergie?
- c'est possible en respectant les relations d'incertitude de la mécanique quantique
- échange de « phonons virtuels »

$$dt dE \cong \hbar$$

$$dE = k_B T_C$$

Pendant le temps  $dt$  l'électron a parcouru:  
(de l'ordre de 1micron pour l'Al:  $T_C=1,2$  K)

$$\xi_0 = av_F dt = a \frac{\hbar v_F}{k_B T_C}$$

$\xi_0$  et  $\lambda$  sont les deux longueurs fondamentales de la supraconductivité

# C-Interprétation de $\xi_0$ : longueur de cohérence

-on peut dire que c'est la « taille » d'une paire de Cooper

-dans le volume  $\xi_0^3$  il y a les centres de gravité de millions d'autres paires

-du fait de l'indiscernabilité, il y a une corrélation entre *tous* les électrons

On a donc un **état quantique macroscopique** décrit par la fonction d'onde

$$\Psi(r, t) = \Psi(\vec{r}) e^{i\varphi(r, t)}$$

$|\psi(r)|^2$  est la densité de paires au point  $r$

La phase  $\varphi$  sera gouvernée par les courants et les champs

En présence de perturbation,  $\xi_0$  donne l'échelle de variation de

$$|\psi(r)|^2$$

## Quantification du flux

Donc, dans un supraconducteur:

-le courant est porté par des paires de Cooper

-l'énergie cinétique d'une paire est nulle ( $k$  et  $-k$ ). On peut donc considérer que les paires sont condensées au niveau de Fermi (ce qui est possible car ce sont des « bosons » (spin nul))

-l'ensemble est décrit par une fonction d'onde:

$$\Psi(r, t) = \Psi(\vec{r}) e^{i\varphi(r, t)}$$

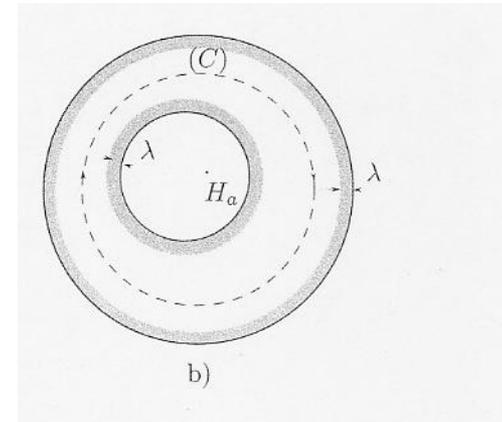
-Imaginons un contour fermé ( $C$ ) entourant un trou à l'intérieur d'un supraconducteur massif où le courant = 0

On doit respecter:

$$\oint_{(C)} \overrightarrow{\text{grad}} \varphi \cdot \overrightarrow{dl} = 2n\pi$$

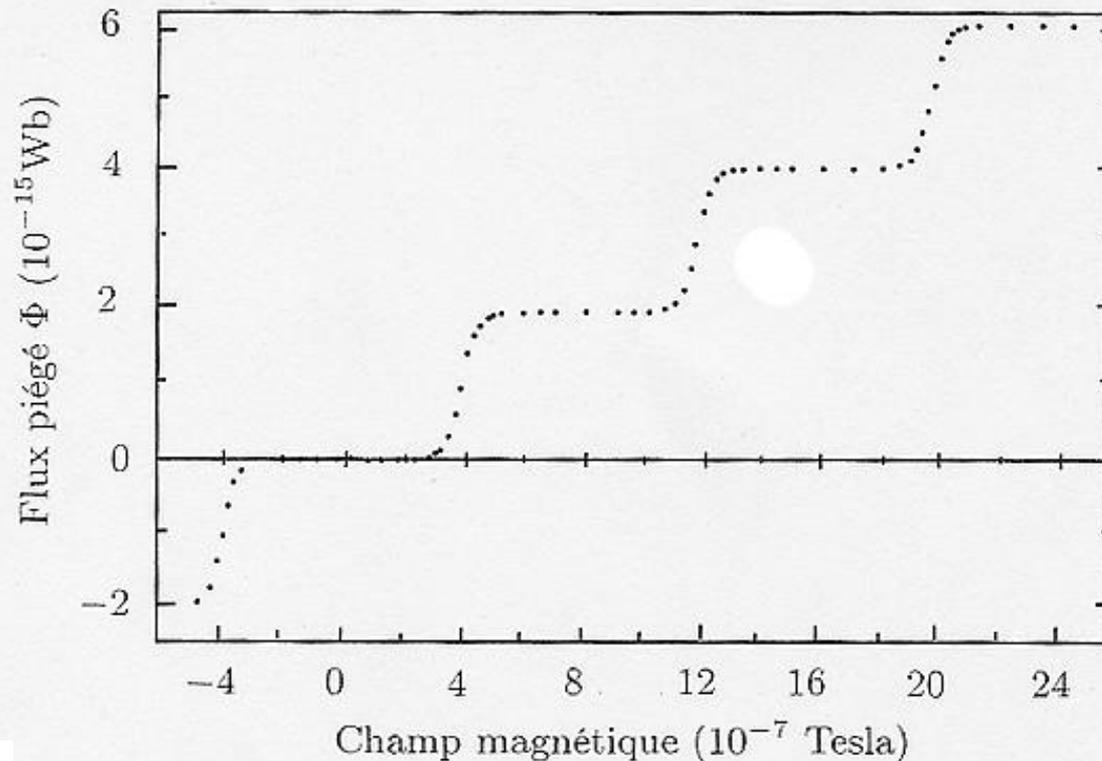
$$\Phi = n\Phi_0$$

$$\Phi_0 = \frac{h}{2e}$$



Le flux qui pénètre un supraconducteur est quantifié

# Quantification du flux



Le flux piégé dans un cylindre d'étain supraconducteur a été mesuré en déterminant le champ magnétique sur l'axe du cylindre. La valeur du flux piégé dans le cylindre, est reportée en fonction du champ magnétique dans lequel a été refroidi le tube d'étain. (D'après W.L. Goodman et al., Phys. Rev. B4, 1530 (1971).

# II- L'état fondamental BCS et les excitations

## A-Démarche et approximations: la théorie microscopique de

J.Bardeen, L.N.Cooper et J.R.Schrieffer (*Phys.Rev.***108**, 1175 (1957))

### 1- Construction d'une fonction d'onde

$$\Psi_{BCS} = \prod_k \left( u_k + v_k e^{i\varphi} c_{k\uparrow}^+ c_{-k\downarrow}^+ \right) \Psi_{Fermi}$$

$v_k^2$  est la probabilité d'occupation de l'état de paire  $k, -k$

$u_k^2$  la probabilité qu'il soit vide. Donc  $u_k^2 + v_k^2 = 1$

### 2- Construction de l'Hamiltonien de paires

-approximation « de champ moyen »

-prendre le niveau de Fermi comme origine  $\xi_k = \varepsilon_k - E_F$

-Choisir la forme du potentiel attractif dû à l'interaction elec-phonon

$$V_{k,l} = \begin{cases} V & \text{si } |\xi_k| < \hbar\omega_D \\ 0 & \text{si } |\xi_k| > \hbar\omega_D \end{cases}$$

### 3- Calculer l'état fondamental par la méthode variationnelle

Le calcul fait apparaître les paramètres

$$\Delta = 2\hbar\omega_D e^{-\frac{1}{N_0 V}}$$

$$E_k = \sqrt{\Delta^2 + \xi_k^2}$$

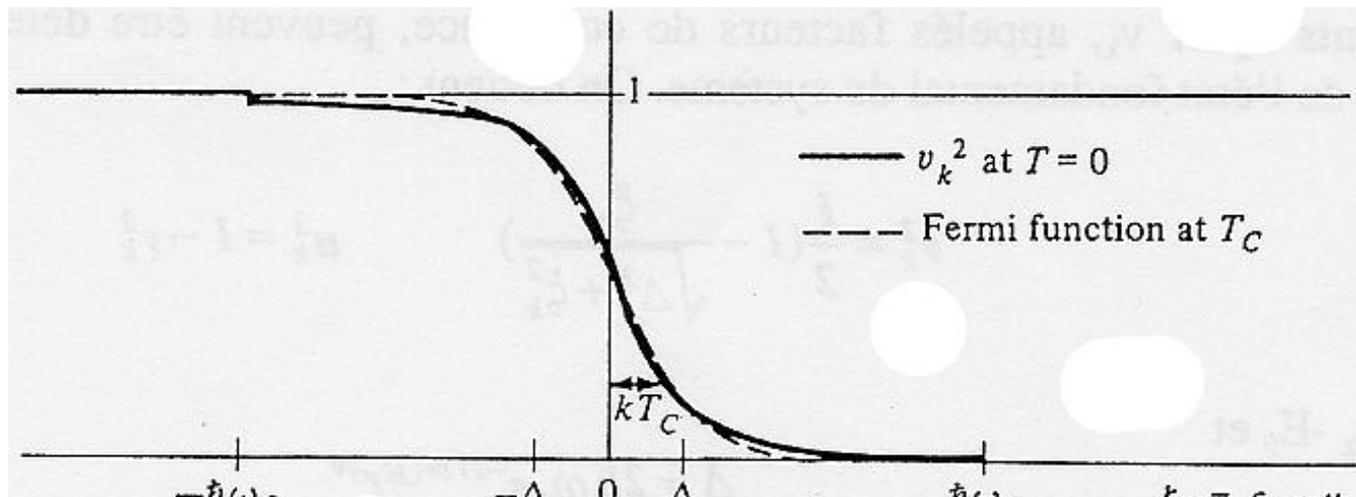
$N_0$  est la densité électronique au niveau de Fermi *du métal normal*

$V$  est le « potentiel attractif BCS » défini précédemment

Limite BCS « de couplage faible »:  $N_0 V \ll 1$

On obtient la probabilité d'occupation de la paire  $k, -k$

$$v_k^2 = \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{\xi_k}{\sqrt{\Delta^2 + \xi_k^2}} \right]$$



# B- Les excitations dans un supraconducteur

1-Etat fondamental et énergie de condensation

$$E_{\text{supra}} - E_{\text{normal}} = -1/2 N_0 \Delta^2 = 1/2 \mu_0 H_c^2$$

=Nombre de paires dans  $\Delta$  multiplié par  $\Delta$

- Donc  $\Delta$  apparaît comme l'ordre de grandeur de *l'énergie de condensation c'est-à-dire l'énergie gagnée par la formation d'une paire*

-2-Les états d'excitation possibles  $\xi_k$  du métal normal sont « transposés » (un à un) dans le supraconducteur à l'énergie:

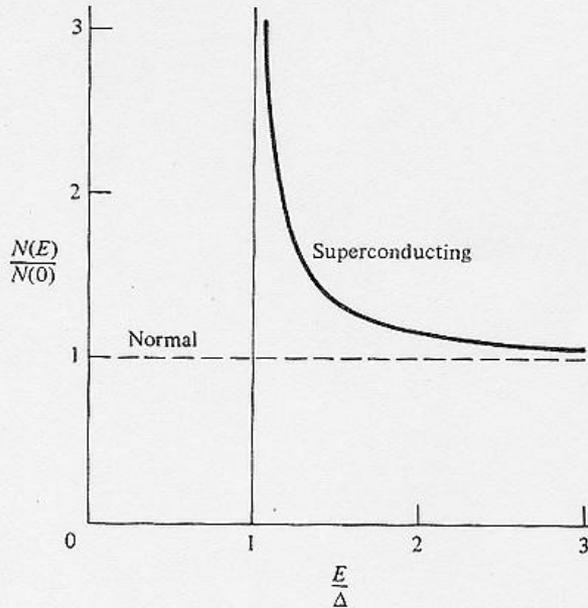
$$E_k = \sqrt{\Delta^2 + \xi_k^2}$$

- $\Delta$  a donc aussi la signification d'un gap dans les excitations

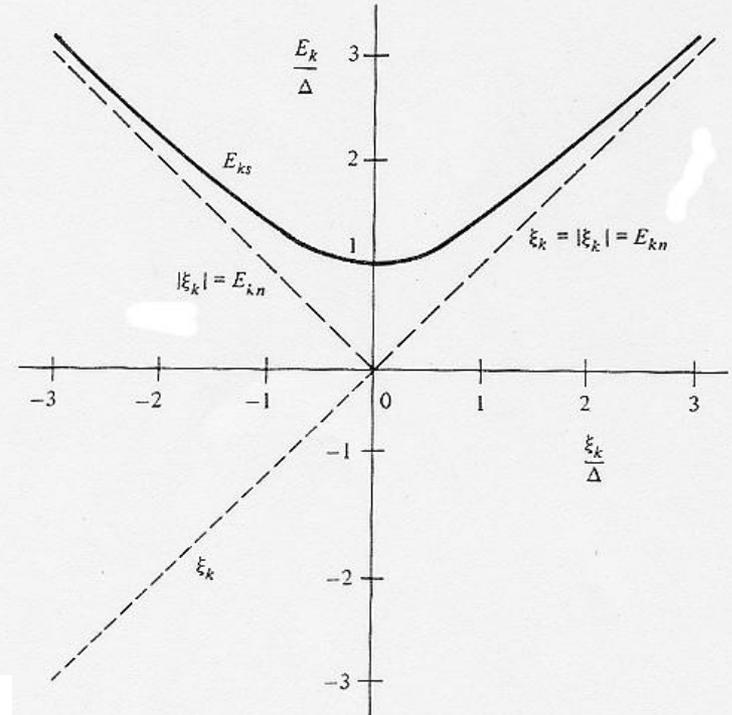
-La densité des états d'excitation en fonction de l'énergie est

$$\frac{N_s(E)}{N(0)} = \begin{cases} \frac{E}{\sqrt{E^2 - \Delta^2}} \\ 0 \quad \text{si } E < \Delta \end{cases}$$

# Quasi particules



Density of states in superconducting compared to normal state. All  $k$  states whose energies fall in the gap in the normal metal are raised in energy above the gap in the superconducting state.



Energies of elementary excitations in the normal and superconducting states as functions of  $\xi_k$ , the independent-particle kinetic energy relative to the Fermi energy.

-La description « semi-conducteur »: attention!  $\Delta$  ou  $2\Delta$

-Pourquoi « quasi-particules » et pas « électrons »?

-Importance des « facteurs de cohérence ». Une excitation  $E_k$  est une combinaison des états « électrons » et des états « trous » du normal

$u_k^2$  électron et  $v_k^2$  trou.  $u_k^2 = 50\%$  si  $E = \Delta$  mais  $u_k^2 = 93\%$  si  $E = 2\Delta$

# C-Températures finies

Les quasiparticules sont des fermions la probabilité d'occupation de  $E_k$  est

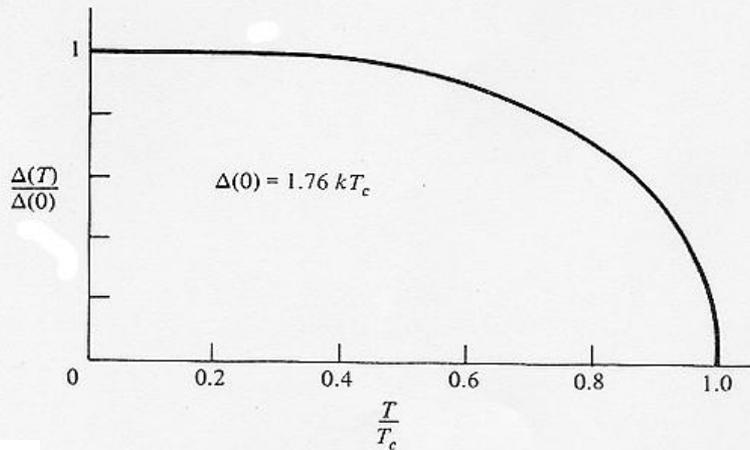
$$f(E_k) = \left( e^{\beta E_k} + 1 \right)^{-1}$$

$$\beta = 1/k_b T$$

On peut alors recalculer  $\Delta$  numériquement

Près de  $T_c$

$$\frac{\Delta(T)}{\Delta(0)} \approx 1,74 \left( 1 - \frac{T}{T_c} \right)^{1/2}$$



... dependence of the energy gap in the BCS theory. Strictly speaking, this universal curve holds only in the weak-coupling limit, but it is a good approximation in most cases.

Rappels

$$\Delta(0) = 2\hbar\omega_D e^{-\frac{1}{N_0V}}$$

$$\xi_0 = \frac{\hbar v_F}{\pi\Delta(0)}$$

La Température critique est obtenue pour  $\Delta(T) = 0$

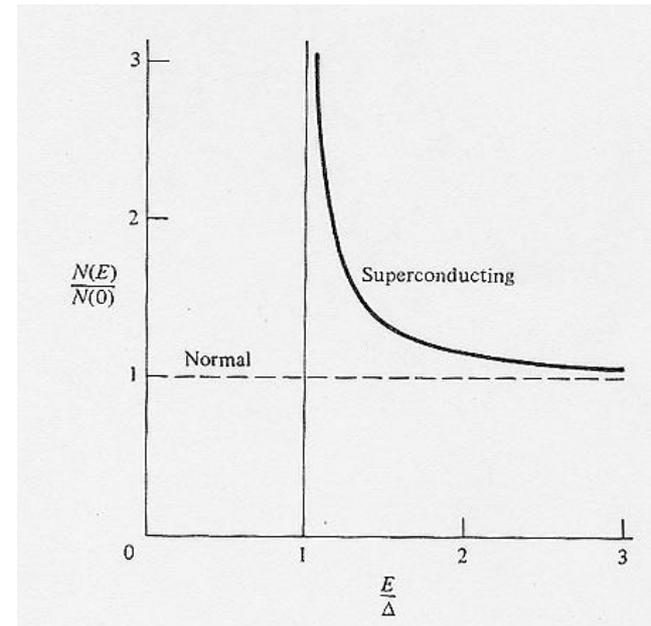
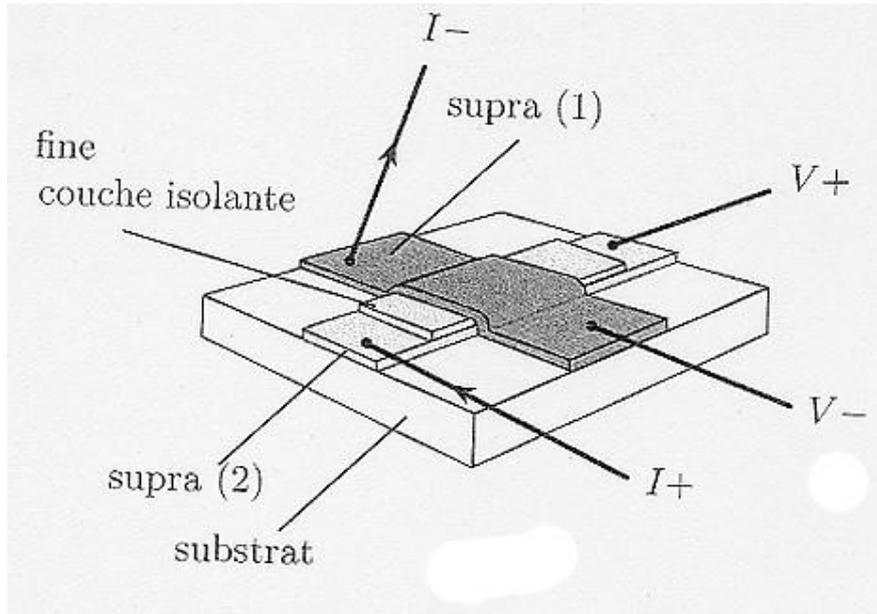
$$\Delta(0) = 1,764 k_b T_c$$

$$k_B T_C = 1,14 \hbar \omega_D e^{-\frac{1}{N_0V}}$$

$\xi(T)$  diverge à  $T_c$

# D-Vérifications expérimentales

## 1-Effet tunnel

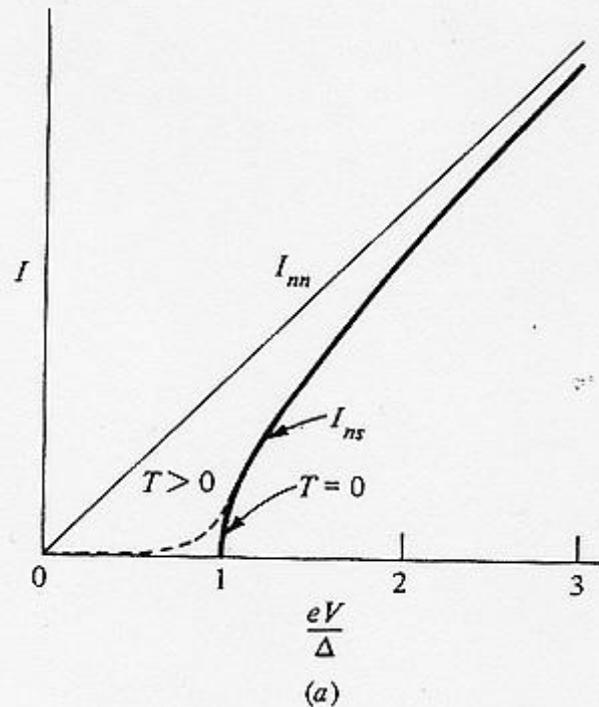


$$I = cste \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{N_s(E)}{N(0)} [f(E) - f(E + eV)] dE$$

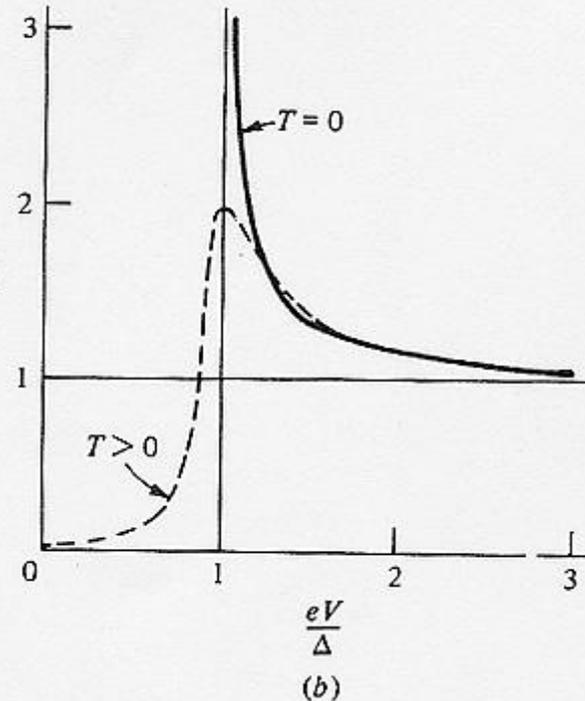
A  $T=0$

$$T = 0 \left( \frac{dI}{dV} \right)_S / \left( \frac{dI}{dV} \right)_N = \frac{N_S}{N_0}$$

# Effet Tunnel



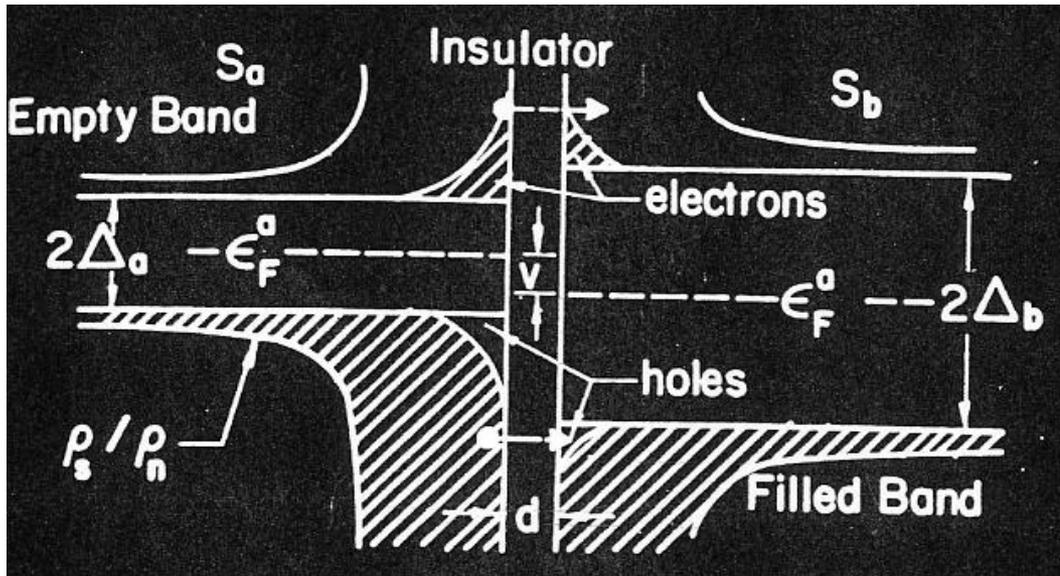
$$\frac{1}{G_{nn}} \frac{dI_{ns}}{dV}$$



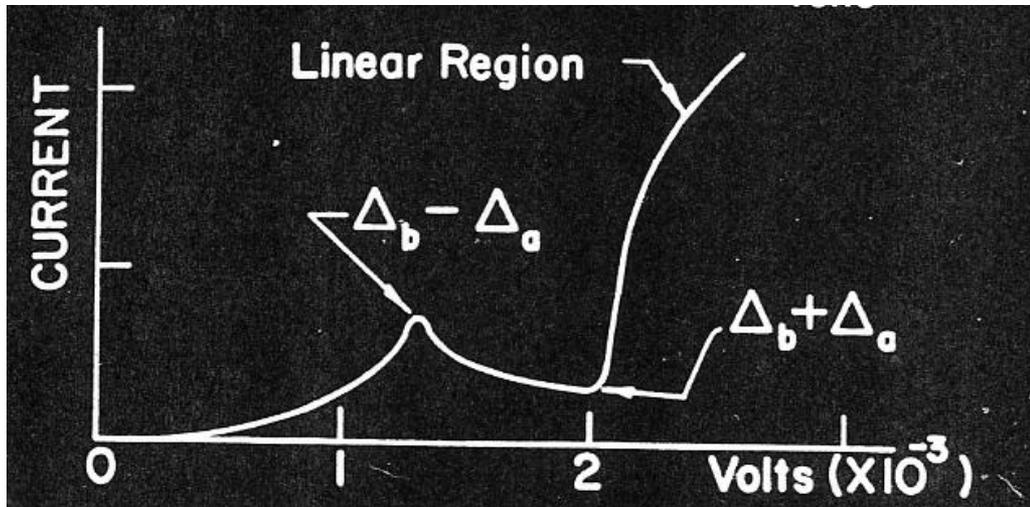
Characteristics of normal-superconductor tunnel junctions. (a)  $I$ - $V$  characteristic. (b) Differential conductance. Solid curves refer to  $T = 0$ ; dashed curves, to a finite temperature.

- Effet tunnel de quasi-particules
- excellente vérification de BCS pour les supra « couplage faible »
- application aux détecteurs (STJ)

# Effet tunnel entre deux supraconducteurs

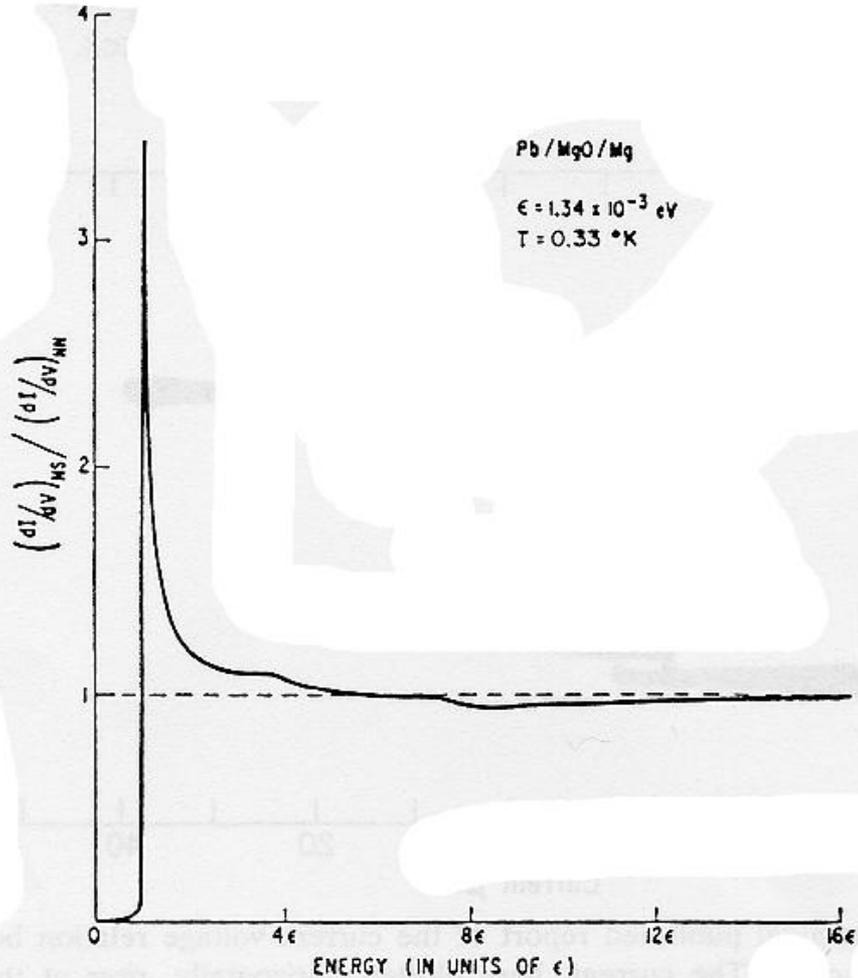


Représentation en « semiconducteur » à Température finie



Courant tunnel observé

# Effet tunnel: supraconducteurs à couplage fort



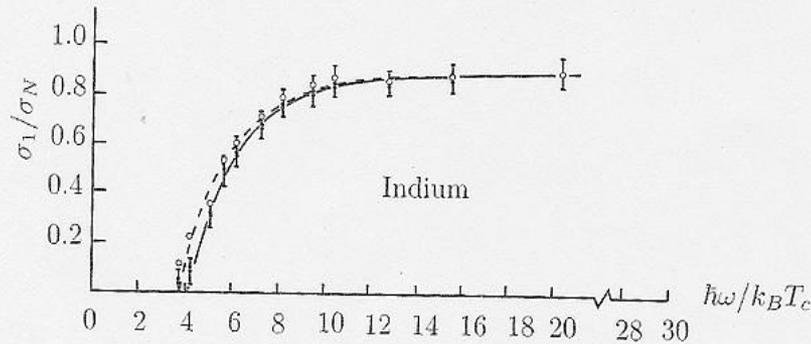
- Les structures au dessus du gap sont reliées aux structures du spectre de Phonons.
- Ne peut pas être décrit par BCS
- Equations d'Eliashberg

Pour ces supraconducteurs:

$$\Delta > 1,76 k_b T_c$$

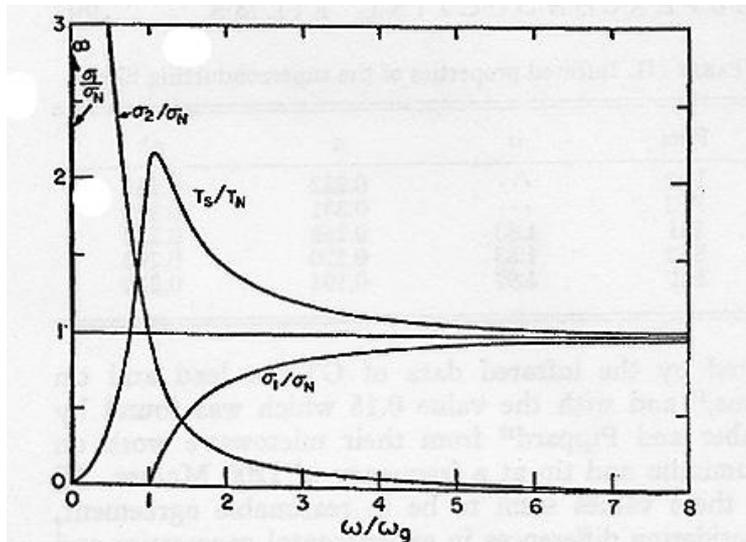
Differential conductance of a Pb-Mg junction vs. voltage, showing the superconducting density of states of Pb (64).

# 2-Absorption micro-onde.



Mesures de l'absorption micro-onde en fonction de la fréquence dans l'indium supra-conducteur pour  $T \ll T_c$ . L'absorption normalisée à celle mesurée dans l'état normal est reportée en fonction de la fréquence normalisée à la température critique. Un seuil d'absorption est observé pour  $\hbar\omega \sim 3.8k_B T_c$ . (D'après D.M. Ginsberg et M. Tinkham, *Physical Review*, 118, 990 (1960)).

On observe une absorption avec un seuil vers  $2 \times 1,76 k_b T_c$   
**Soit  $2\Delta$**



Frequency dependence of  $\sigma_1/\sigma_N$ ,  $\sigma_2/\sigma_N$ , and  $T_S/T_N$  according to the calculation of Mattis and Bardeen. The transmission curve is for a film resistance  $377/(n+1)$  ohms per square, where  $n$  is the refractive index of the substrate.

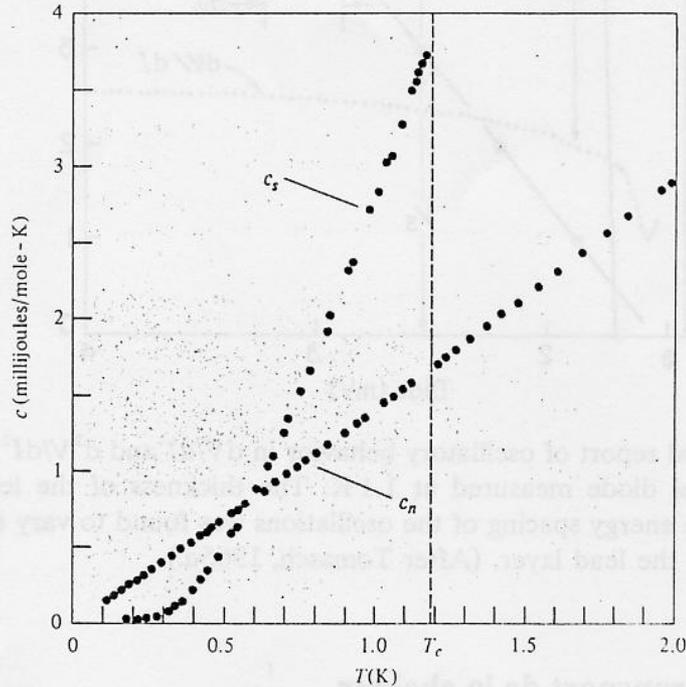
Pour décrire le comportement en HF  
On introduit la conductivité complexe

$$\sigma = \sigma_1 - i\sigma_2$$

Remarque: Comparaison avec les semiconducteurs

Supra: réflexion parfaite à basse fréquence

# 3-Chaleur spécifique

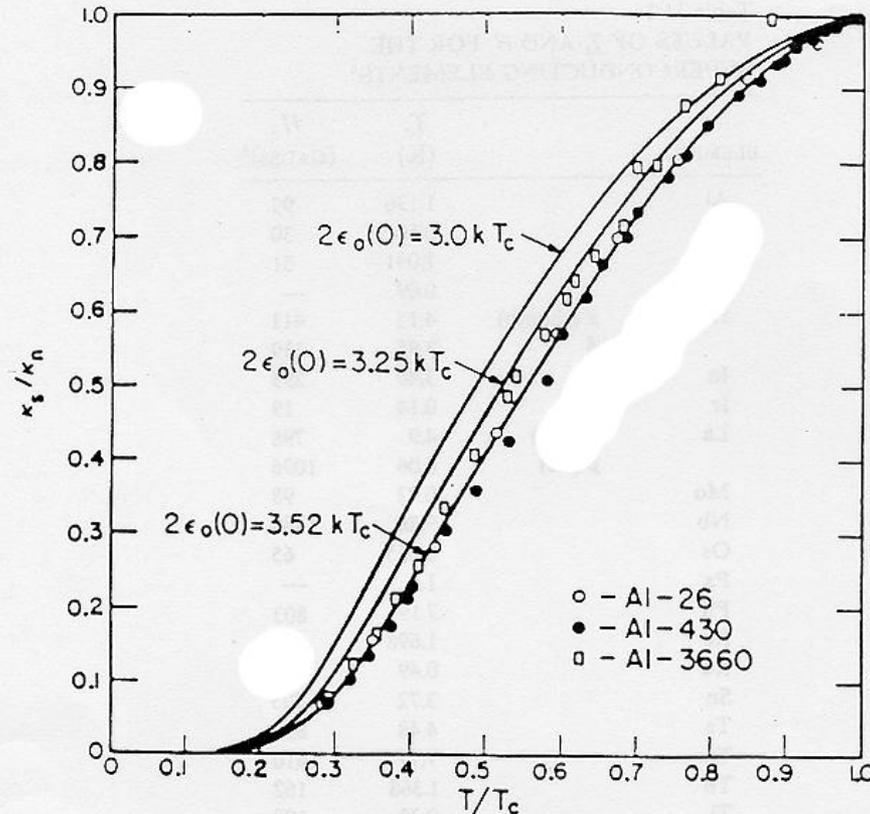


Low-temperature specific heat of normal and superconducting aluminum. The normal phase is produced below  $T_c$  by application of a weak (300-gauss) magnetic field, which destroys the superconducting ordering but has otherwise negligible effect on the specific heat. The Debye temperature is quite high in aluminum, so the specific heat is dominated by the electronic contribution throughout this temperature range (as can be seen from the fact that the normal-state curve is quite close to being linear). The discontinuity at  $T_c$  agrees well with the theoretical prediction (34.22)  $[c_s - c_n]/c_n = 1.43$ . Well below  $T_c$ ,  $c_s$  drops far below  $c_n$ , suggesting the existence of an energy gap. (N. E. Phillips, *Phys. Rev.* **114**, 676 (1959).)

Application intéressante pour faire des absorbeurs  
de faible capacité calorifique

Attention: un excès de chaleur spécifique à  $T_c$  (cas des TES)

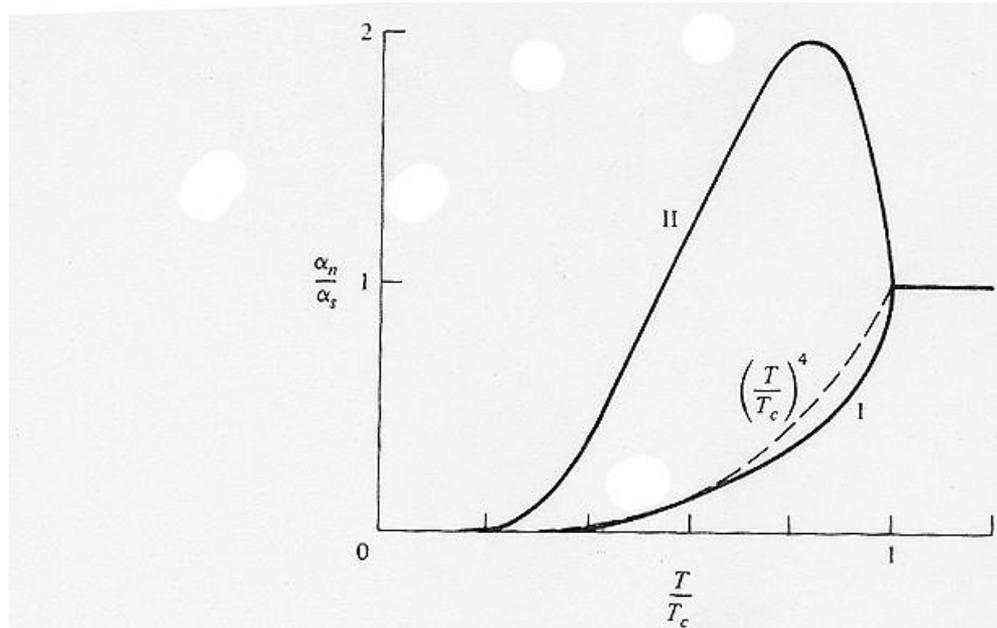
# 4- Conductivité thermique



Measured ratio of the superconducting to the normal thermal conductivity for aluminium. The theoretical curves are shown for the indicated values of the gap width  $2\Delta(0)$  at  $T=0$ . [After Satterthwaite (153).]

- Les paires de Cooper ne transportent pas d'entropie
- La conductivité thermique est assurée par les QP
- Applications en cryogénie

## 4-Atténuation ultrasonore et relaxation nucléaire



Temperature dependence of low-frequency absorption processes obeying case I and II coherence factors, compared with the  $(T/T_c)^4$  dependence that might be expected for *all* processes from a simple two-fluid model. The curve for case I applies to ultrasonic attenuation and it is a well-defined low-frequency limit. The curve for case II, which applies to nuclear relaxation or electromagnetic absorption, has no well-defined low-frequency limit unless gap anisotropy or level broadening is taken into account. The curve drawn here corresponds to a broadening of about  $0.02\Delta(0)$ .

- Ces excitations de basse énergie ne peuvent pas casser les paires
- Ce sont les quasi particules –à température finie- qui absorbent
- Le maximum dans la courbe relative à la relaxation nucléaire est une illustration spectaculaire des « facteurs de cohérence »  $(u_k, v_k)$

# E-Effets des impuretés (non magnétiques)

- Le mouvement des électrons est diffusif: introduction de  $l$  (le libre parcours moyen)
- Les états  $k$  et  $-k$  ne sont plus des états propres du métal normal
- Mais ils peuvent être remplacés par des états diffusifs symétriques par renversement du temps, pour construire les états de paires.

Théorème d'Anderson : pas d'effet sur la  $T_c$  (au premier ordre en  $k_F l$ )

Mais une modification essentielle des longueurs caractéristiques

$$\xi_0 \text{ devient } \xi_{\text{eff}} \quad 1/\xi_{\text{eff}} = 1/\xi_0 + 1/l$$

$$\lambda_{\text{eff}}(l, T) = \lambda(T)(1 + \xi_0/l)$$

$l \ll \xi_0$  définit les « supraconducteurs sales »

Plus faciles à traiter que le cas propre ( localité versus non localité)

# F- Compétition entre énergie de condensation et énergie magnétique

-deux longueurs caractéristiques  $\xi_{\text{eff}}(l, T)$  et  $\lambda_{\text{eff}}(l, T)$

-Ces deux longueurs *divergent* à  $T_c$  comme  $\left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^{-1/2}$   $\kappa = \frac{\lambda_{\text{eff}}}{\xi_{\text{eff}}}$

-On définit le paramètre de Ginsburg Landau:

$\kappa = 0,96\lambda_l(0) / \xi_0$  (Cas propre)  $\kappa = 0,715\lambda(0) / l$  (cas sale)

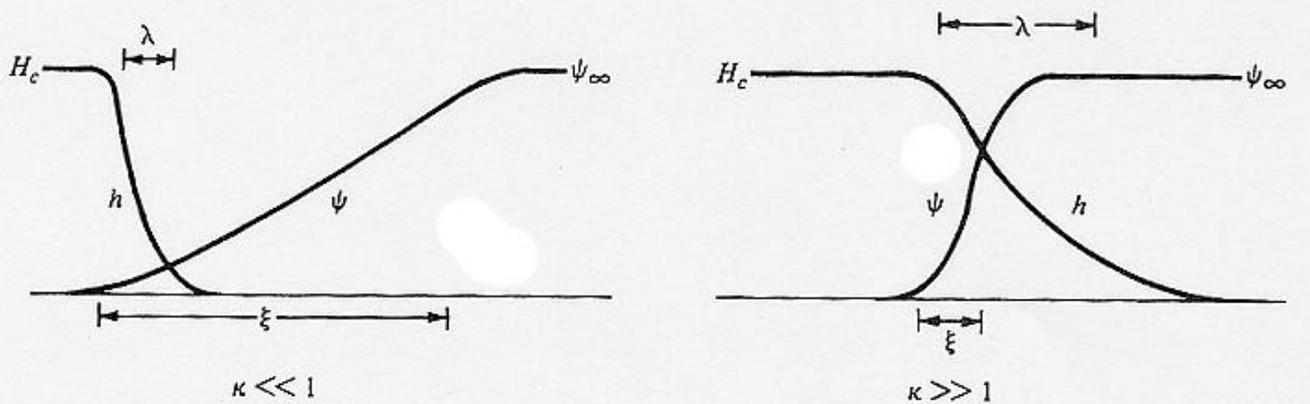


FIGURE 4-2

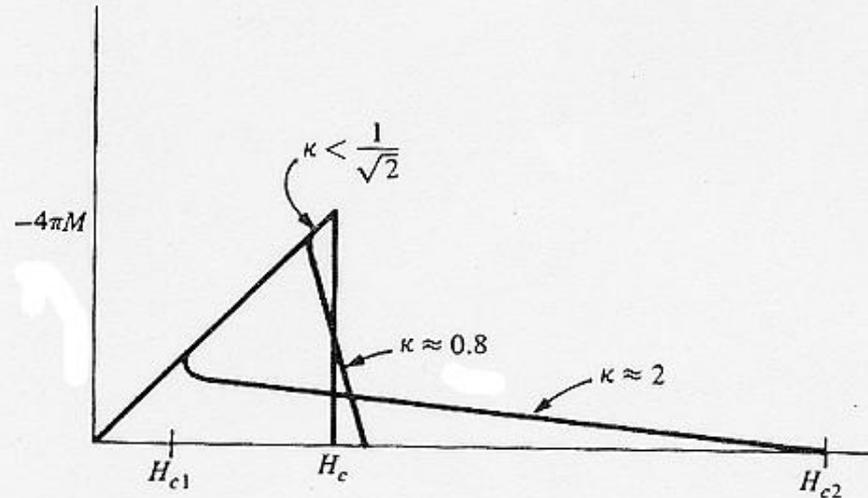
Schematic diagram of variation of  $h$  and  $\psi$  in a domain wall. The case  $\kappa \ll 1$  refers to a type I superconductor (positive wall energy); the case  $\kappa \gg 1$  refers to a type II superconductor (negative wall energy).

$\kappa < \frac{1}{\sqrt{2}}$  Première espèce

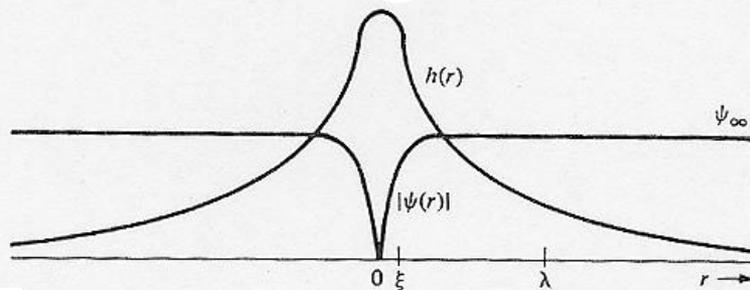
$\kappa > \frac{1}{\sqrt{2}}$  Deuxième espèce

Supraconducteurs de première espèce et de deuxième espèce

# G-Deux types de supraconducteurs I et II



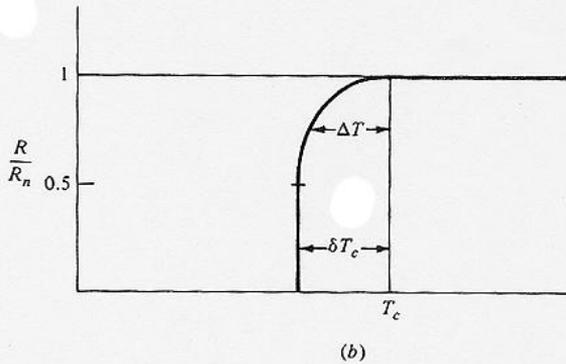
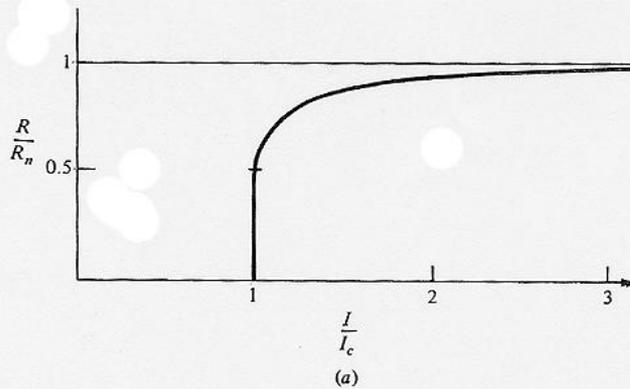
Comparison of magnetization curves for three superconductors with the same value of thermodynamic critical field  $H_c$ , but different values of  $\kappa$ . For  $\kappa < 1/\sqrt{2}$ , the superconductor is of type I and exhibits a first-order transition at  $H_c$ . For  $\kappa > 1/\sqrt{2}$ , the superconductor is type II and shows second-order transitions at  $H_{c1}$  and  $H_{c2}$  (for clarity, marked only for the highest  $\kappa$  case). In all cases, the area under the curve is the condensation energy  $H_c^2/8\pi$ .



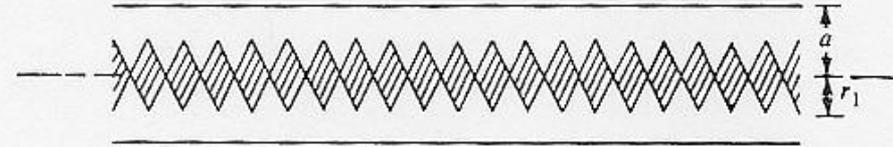
Structure of an isolated Abrikosov vortex in a material with  $\kappa \approx 8$ . The maximum value of  $h(r)$  is approximately  $2H_{c1}$ .

Type II, Entre  $H_{c1}$  et  $H_{c2}$   
état mixte ou phase de  
Schubnikov

# Courants critiques dans les fils (type I)

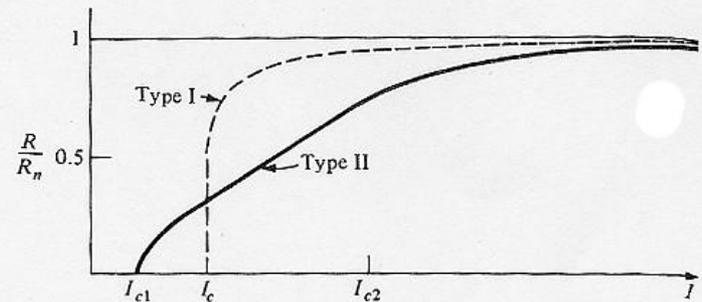


Resistance of wire in the intermediate state. (a) Current dependence at constant temperature. (b) Temperature dependence at constant current, showing the broadening and depression of the apparent transition temperature. The parameter  $\delta T_c = I(dI_c/dT)^{-1}$ .



Intermediate-state structure in a wire carrying a current in excess of  $I_c$ . The shaded region is superconducting. The core radius  $r_1$  is  $a$  at  $I_c$ , and ideally approaches zero only asymptotically as  $I \rightarrow \infty$ .

## Comparaison avec type II



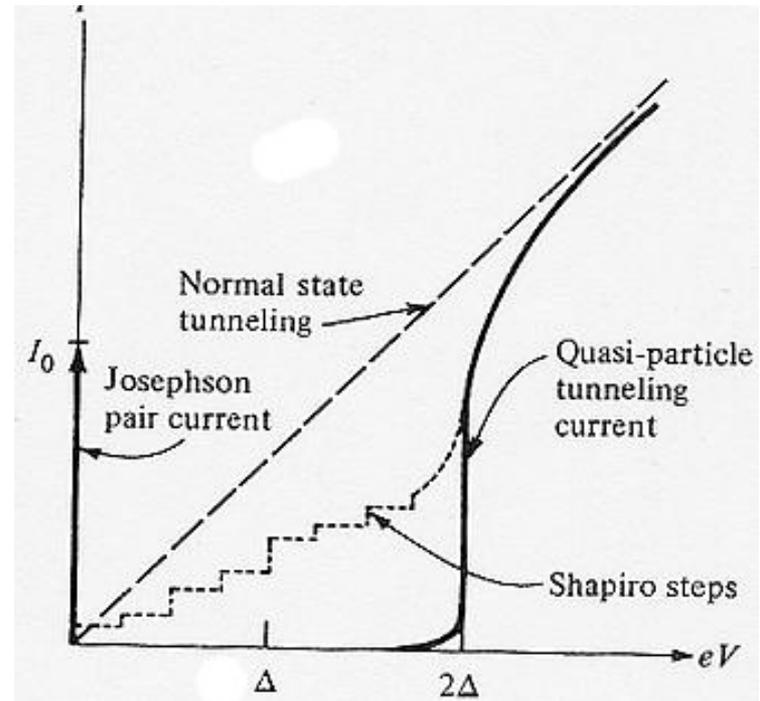
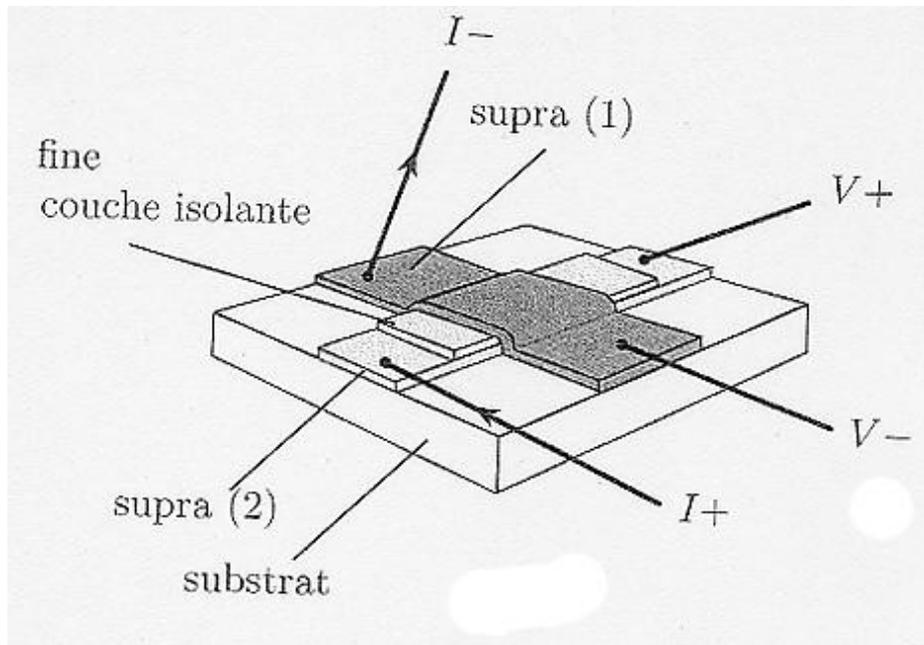
Onset of resistance in a wire of ideal type II superconductor with no pinning and  $\kappa \approx 1.7$ . For comparison, the dashed curve shows the corresponding behavior of a type I superconductor with the same  $H_c$ .

# III-Cohérence de phase. A-Effet Josephson (1962)

-un supraconducteur est dans un état « quantique macroscopique » décrit par

$$\Psi(r,t) = \Psi(r)e^{i\phi(r,t)}$$

-nous avons vu une première conséquence: la quantification du flux  
-considérons à nouveau une jonction tunnel, mais à barrière très faible



# Equations de Josephson

-la transmission tunnel de paires est renforcée par la cohérence

-Le courant à travers la jonction s'accompagne d'un saut brutal de la Phase

$$J = J_c \sin(\varphi_1 - \varphi_2)$$

*C'est l'effet Josephson continu*

$J_c$  dépend de la jonction, de résistance normale  $R_n$  et varie comme  $1/R_n$   
(ordre de grandeur de 1mA à 10 $\mu$ A pour  $\Delta=1$ meV et  $R_n$  de 1 $\Omega$  à 100 $\Omega$ )

-Si on impose une tension V

$$\frac{d(\varphi_1 - \varphi_2)}{dt} = \frac{2eV}{\hbar}$$

-La jonction est le siège d'un courant alternatif à la fréquence

$$\nu = \frac{2eV}{\hbar} \quad (483 \text{ GH} / \text{mV})$$

*C'est l'effet Josephson alternatif*

-Intérêt fondamental en métrologie: étalon Volt

# Effet du champ magnétique

-signatures de l'effet Josephson

-L'effet d'une irradiation micro-onde: marches de Schapiro

-L'effet du champ magnétique sur  $J_c$

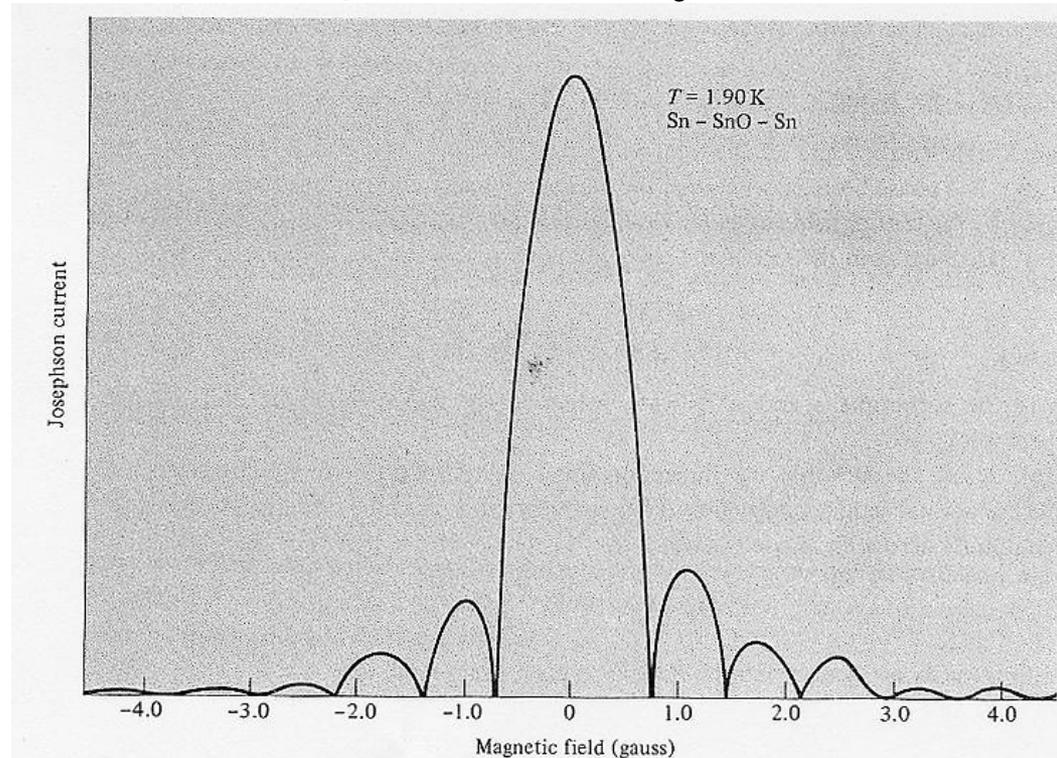


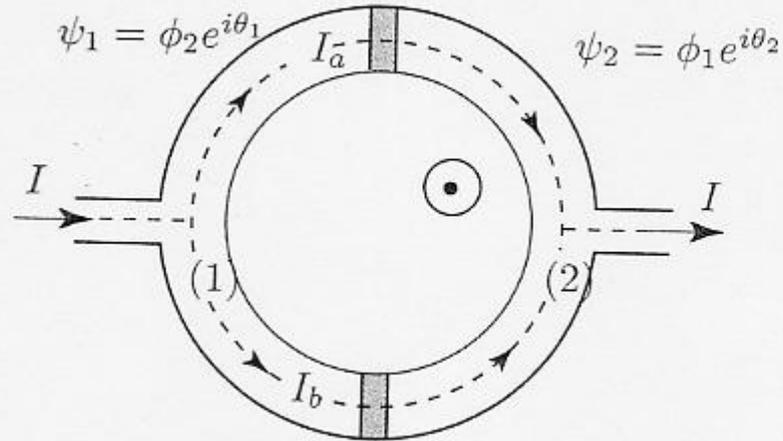
Figure 34.11

Josephson tunneling current as a function of magnetic field in an Sn-SnO-Sn junction. (R. C. Jaklevic, quoted in James E. Mercereau, *Superconductivity*, vol. 1, R. D. Parks, ed., Dekker, New York, 1969, p. 393.)

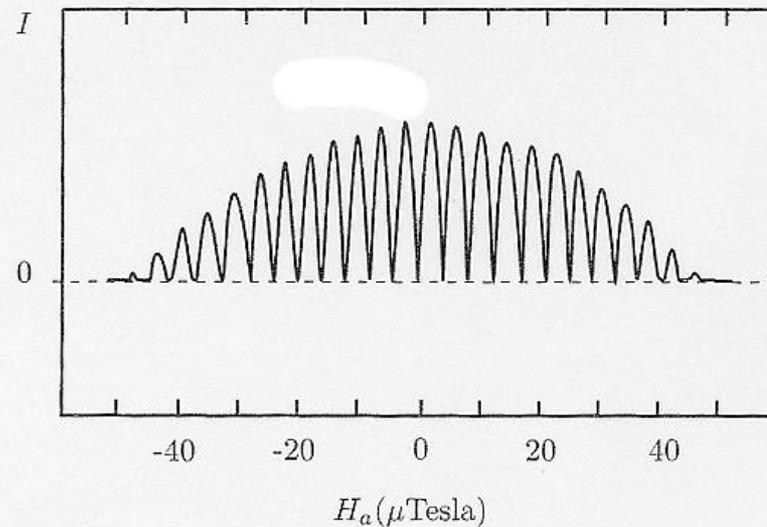
-Rappelle une figure de diffraction

-magnétomètre sensible

# B- Le SQUID (Superconducting quantum interference device)



Principe de l'interferomètre utilisant deux jonctions Josephson, à la base du DC-SQUID (qui fonctionne avec un courant continu  $I$ ).



Courant à travers un interféromètre à deux jonctions Josephson en fonction du champ appliqué. (D'après R.C Jaklevic, J. Lambe, J.E. Mercereau et A.H. Silver, *Phys. Rev.* **140** A, 1628 (1965). Accord © American Physical Society (APS)).

# Conclusion

- Sujet toujours très actif au niveau fondamental  
Ex: Supraconducteurs à haute température critique
- Pour les applications ultimes en détection, les très basses températures seront toujours nécessaires

## *A suivre*

- Effet de proximité
- films minces et supraconductivité
- fluctuations
- électrodynamique des supraconducteurs
- supraconductivité hors d'équilibre (relaxation des quasi-particules)
- impuretés magnétique: supraconductivité « gapless »
- .....