

# Traitement du signal

Ecole de Détection de Rayonnements à Très Basse Température

J. Gascon

14 mai 2009, Fréjus

# Webographie basique

- ▶ Présentation de Richard Schnee au "Training session Aussois 2008" ILIAS

<http://pisrv0.pit.physik.uni-tuebingen.de/aussois08/>

- ▶ Thèse de Philippe Di Stefano (EDELWEISS) chapitres 5-6

<http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00009267/fr/>

- ▶ Thèse de Sunil Golwala (CDMS) appendice B

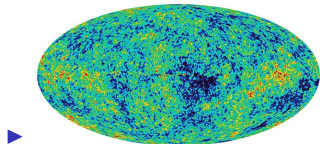
<http://cosmology.berkeley.edu/preprints/cdms/golwalathesis/thesis.pdf>

- ▶ Site *mkfilter* de Tony Fischer

<http://www-users.cs.york.ac.uk/ fisher/mkfilter/>

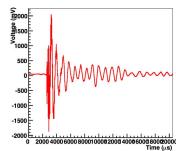
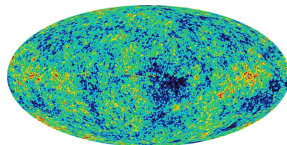
# Différents types de signaux

- ▶ Image
  - ▶ Médical
  - ▶ Fond cosmologique



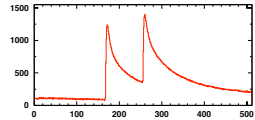
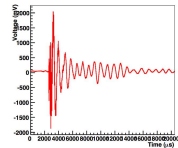
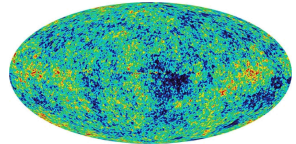
# Différents types de signaux

- ▶ Image
  - ▶ Médical
  - ▶ Fond cosmologique
- ▶ Signaux fugitifs variables
  - ▶ Séismologie
  - ▶ Ondes gravitationnelles



# Différents types de signaux

- ▶ Image
  - ▶ Médical
  - ▶ Fond cosmologique
- ▶ Signaux fugitifs variables
  - ▶ Séismologie
  - ▶ Ondes gravitationnelles
- ▶ Signaux fugitifs homothétiques
  - ▶ Détection de photons X,  $\gamma$
  - ▶ Impulsions de scintillation, de charge, de phonons



# Traitement de signaux impulsions

Fonction du temps  $S(t)$

- ▶ **Fugitif:** l'excitation arrive à un temps précis  $t_0$
- ▶ **Homothétique:** forme invariante  $r(t)$
- ▶ Les seules informations par impulsion sont:
  - ▶ Temps  $t_0$
  - ▶ Amplitude  $A$

$$S(t) = Ar(t - t_0)$$

- ▶ Traitement = extraction de  $A$  et  $t_0$  pour chaque impulsion
- ▶ Cas moins idéaux:
  - ▶ Plusieurs familles d'impulsions selon le type d'excitation:  $r_1(t)$ ,  $r_2(t)$ ,  $r_3(t)$ , ...
  - ▶ Forme dépendant de  $A$ :  $r(t, A)$

# Traitement online vs offline

- ▶ Traitement préalable effectué par l'électronique de lecture
  1. Filtrage
  2. Déclenchement
  3. Numérisation
- ▶ Electronique de plus en plus numérique
  1. Filtrage
  2. Numérisation
  3. Filtrage numérique
  4. Déclenchement
- ▶ Traitement offline: avantages et inconvénients
  - ▶ Plus de temps, de CPU, de comparaisons entre algorithmes
  - ▶ Echantillons avant et *après* le signal
  - ▶ Seuls les échantillons sauvés par le déclenchement sont disponibles

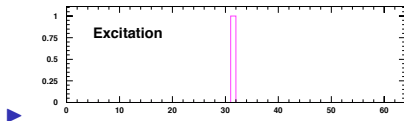
# Quelle est le meilleur traitement?

*Dépend de l'objectif*

- ▶ Analyse online
  - ▶ "Embarquée" (électronique de lecture) ou sur ordinateur
  - ▶ Traitement en temps réel (données futures non disponibles)
  - ▶ Efficacité, rapidité, robustesse
- ▶ Analyse offline rapide
  - ▶ Alerte en cas problèmes (les révéler plutôt que les filtrer)
  - ▶ Pas de complexité inutile
- ▶ Analyse offline pour comprendre (étude, thèse, article NIM)
  - ▶ Analyses longues, parallèles: exploration et haute performance.
- ▶ Analyse offline pour convaincre (lettre, grand public)
  - ▶ Impact visuel et psychologique
  - ▶ Pas de complexité inutile

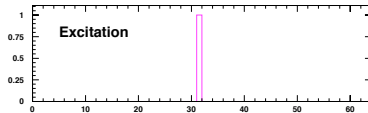


# Les éléments d'un signal

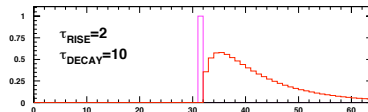


Excitation  $e(t_0)$

# Les éléments d'un signal

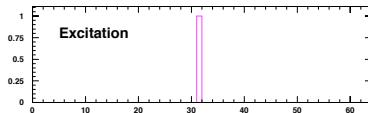


Excitation  $e(t_0)$

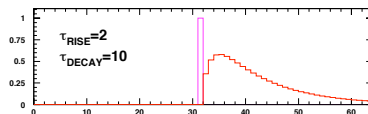


Réponse  $r(t - t_0)$

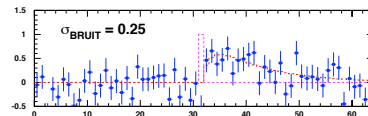
# Les éléments d'un signal



Excitation  $e(t_0)$

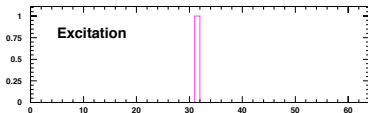


Réponse  $r(t - t_0)$

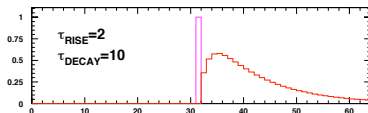


Bruit  $b(t)$

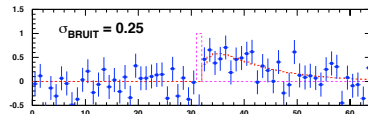
# Les éléments d'un signal



Excitation  $e(t_0)$



Réponse  $r(t - t_0)$



Bruit  $b(t)$

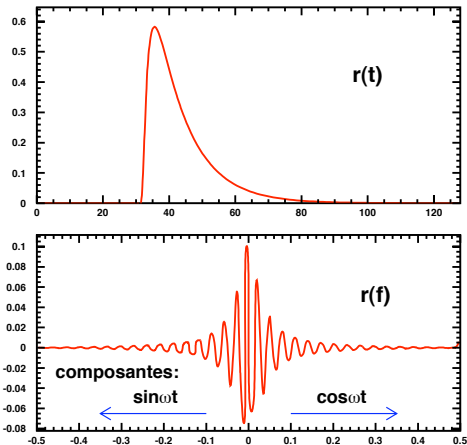
► 
$$d(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e(t_0)r(t - t_0)dt_0 + b(t)$$

# Représentation en temps et en fréquence

Transformée de Fourier  
( $\omega = 2\pi f$ )

$$\tilde{r}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp^{-j\omega t} r(t) dt$$

$$r(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp^{j\omega t} \tilde{r}(f) df$$



## Cas discret

- ▶  $N$  pas en temps sur un intervalle  $T$ ,  $t_k = k\Delta t = \frac{nT}{N}$  ( $T \neq \infty$ )
- ▶  $r(t) \rightarrow r_k$
- ▶ Fréquence  $f_n = \frac{n}{T} = \frac{n}{N} \frac{1}{\Delta t}$

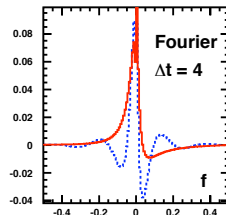
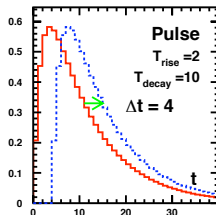
$$\tilde{r}_n = \frac{1}{N} \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} r_k \exp^{-j\omega_n t_k} \qquad r_k = \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \tilde{r}_n \exp^{j\omega_n t_k}$$

- ▶ Représentation complète de  $r(t)$  par  $r_k$  ou  $\tilde{r}_n$  si les composantes  $\tilde{r}(f) = 0$  pour  $f > f_{Nyquist}$  ( $f_{Nyquist} = \frac{1}{2} \frac{1}{T}$ ).
- ▶ Fréquence  $f > f_{Nyquist}$  reliés à  $f - f_{Nyquist}$ : filtre "anti-alias"

# Information sur $t_0$ dans l'espace fréquence

Continu:

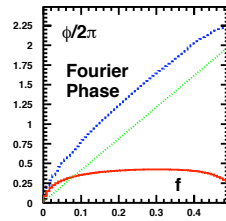
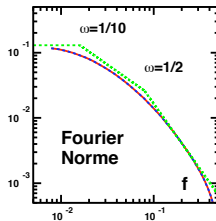
$$r(t - t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp^{j\omega t} \exp^{-j\omega t} \tilde{r}(f) df$$



Discret:

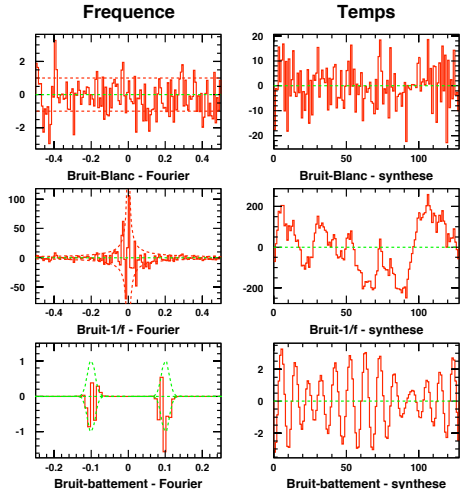
$$r_k(t_0) =$$

$$\sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \tilde{r}_n \exp^{j\omega_n t_k} \exp^{-j\omega_n t_0}$$



# Type de bruits

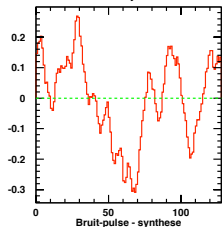
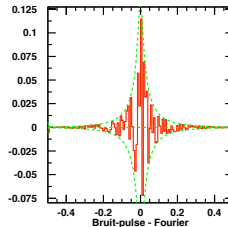
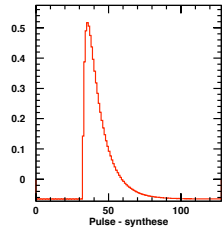
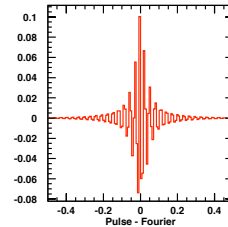
- ▶ **Bruit blanc**  
puissance (dispersion  $\sigma_f$ )  
égale à toute fréquence,  
dispersion  $\sigma_t$  égale en  
tout temps
- ▶ **Bruit  $1/f$**   
domine à basse fréquence
- ▶ **Oscillation**  
Une fréquence précise
- ▶ **Battement**  
Mélange de fréquence





# Information sur $t_0$ dans l'espace fréquence

- ▶ Exemple: deux échantillons de puissance  $r^2(f)$  égale:
  - ▶ En haut: impulsion
  - ▶ En bas: bruit
- ▶ "Bruit" obtenu par l'incohérence des phases aux différentes  $f_n$  ( $\phi(r_n)$  aléatoire)
- ▶ Discrimination signal/bruit: utiliser cette propriété de corrélation



# Analyse en temps

- ▶ Bien adaptée lorsque le bruit est blanc
- ▶ Pour une moyenne sur le temps très longue

$$\langle n(t) \rangle = 0 \qquad \langle n^2(t) \rangle = \sigma^2$$

- ▶ Pour  $N$  échantillons

$$\langle n_k \rangle = 0 \pm \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

$$\langle d_k \rangle = A \langle r_k \rangle \pm \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

- ▶ Avantageux d'intégrer tant que  $\langle r_k \rangle$  ne décroît pas trop vite

# Calage en temps

- ▶ Si la plage en temps couvre tout  $r(t)$ ,  $\langle r_k \rangle$  est fixe et normalisable à 1:

$$\langle d_k \rangle = A \pm \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

- ▶ Si des morceaux de  $r(t)$  dépassent les bornes d'intégration,  $A = \langle d_k \rangle / \langle r_k \rangle$  dépend de  $\langle r_k \rangle$  sur cette plage
- ▶ Si on intègre sur des régions où  $r_k$  est faible, on diminue le signal sur bruit  $\langle r_k \rangle \sqrt{N} / \sigma$
- ▶ L'information sur le calage en temps dépend de la dérivée de la fonction:  $\frac{d}{dt}d(t) = A \frac{d}{dt}r(t)$ , et sensible au bruit haute fréquence

# Minimisation de l'erreur sur $A$

- ▶ Adaptons la fenêtre d'intégration en pondérant les échantillons avec un poids  $w_k$

$$\sum w_k d_k = A \sum w_k r_k + \sum w_k b_k \rightarrow \langle \vec{w} \cdot \vec{d} \rangle = A \langle \vec{w} \cdot \vec{r} \rangle$$

$$A = \frac{\langle \vec{w} \cdot \vec{d} \rangle}{\langle \vec{w} \cdot \vec{r} \rangle} \quad \sigma_A^2 = \frac{\langle \vec{w} \cdot \vec{w} \rangle \sigma^2}{\langle \vec{w} \cdot \vec{r} \rangle^2}$$

- ▶ Minimisons  $\sigma_A^2/A^2$  par rapport à  $w_j$ , on trouve

$$w_j = r_j \frac{\langle \vec{w} \cdot \vec{w} \rangle}{\langle \vec{w} \cdot \vec{r} \rangle}$$

- ▶ Le meilleur filtre  $w_j$  est le signal  $r_j$  lui-même:  $\frac{d}{dA} d(t) = r(t)$

Convolution et  $\chi^2$ 

- ▶ Essayons plutôt de minimiser le  $\chi^2$ :

$$\chi^2 = \sum \frac{(d_k - Ar_k)^2}{\sigma^2}$$

$$\frac{d}{dA} \chi^2 = -2 \sum \frac{(d_k - Ar_k)r_k}{\sigma^2}$$

- ▶ on trouve également le meilleur  $\chi^2$  avec la convolution de  $\vec{d}$  avec  $\vec{r}$

$$A = \frac{\langle \vec{r} \cdot \vec{d} \rangle}{\langle \vec{r} \cdot \vec{r} \rangle}$$

- ▶ Un décalage temporel  $\delta t$  entre le signal  $d'(t) = Ar(t - \delta t)$  et le modèle  $r(t)$  diminuerait la convolution  $\langle \vec{r} \cdot \vec{d} \rangle$  et donc maximiser  $A$  par rapport à ce décalage est une façon de déterminer le  $t_0$  du pulse.

# Filtrage

- ▶ L'intégration sur une plage finie de  $N$  canaux (avec pondération  $w_k$  ou non) correspond à un filtre numérique à  $N$  coefficients
- ▶ Ces filtres font partie de la famille des filtres FIR *Finite Impulse Response*
- ▶ Moins pratique online, à cause du nombre de coefficients qui augmente avec la précision de l'échantillonnage

# Filtrage IIR (Infinite Impulse Response)

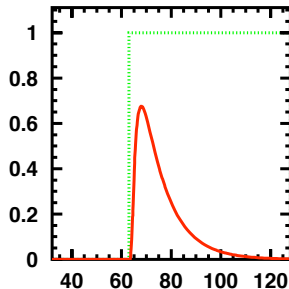
Moins de coefficients: utilise les mesures brutes ( $x[n]$ ) et celles déjà filtrées ( $y[n]$ )

Exemple: filtre passe bande Butterworth 1<sup>er</sup> ordre obtenu avec `mkfilter` (<http://www-users.cs.york.ac.uk/~fisher/mkfilter>)

Coupure basse  $f_1 = \frac{1}{2\pi \cdot 2}$  et haute  $f_2 = \frac{1}{2\pi \cdot 10}$

$$\begin{aligned}y[n] &= (-1 * x[n - 2]) \\ &+ (0 * x[n - 1]) \\ &+ (1 * x[n - 0]) \\ &+ (-0.6629111067 * y[n - 2]) \\ &+ (1.6209507238 * y[n - 1])\end{aligned}$$

$$GAIN = 5.643700253$$



# Analyse en fréquence

- ▶ A utiliser quand le bruit n'est pas blanc:

*bruit à temps  $t$  corrélé avec celui à  $t'$*

- ▶ Suppose que le bruit à fréquence  $f$  n'est pas corrélé avec le bruit à fréquence  $f'$
- ▶ Dans ce cas, le  $\chi^2$  suivant prend son sens (somme de termes non-corrélés):

$$\chi^2 = \sum_n \frac{(\tilde{d}_n - A\tilde{r}_n)^2}{\sigma_n^2}$$

- ▶  $\tilde{d}_n, \tilde{r}_n$ : composantes de Fourier de fréquence  $f_n$  de  $d(t), r(t)$
- ▶  $\sigma_n^2$  est la dispersion du bruit  $\tilde{b}_n$  à cette fréquence



# Analyse en fréquence

- ▶ La minimisation du  $\chi^2$  donne:

$$A = \frac{\langle \vec{r} \cdot \vec{d} \rangle_b}{\langle \vec{r} \cdot \vec{r} \rangle_b}$$

où les produits scalaires  $\langle \rangle_b$  sont pondérés par  $\sigma_n$

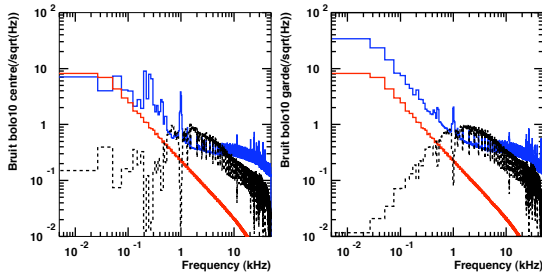
$$\langle \vec{r} \cdot \vec{d} \rangle_b = \sum_n \frac{\tilde{r}_n^* \tilde{d}_n}{\sigma_n^2}$$

- ▶ Si on veut conserver toute l'information sur la phase (et entre autres le  $t_0$  du pulse), il faut tenir compte des valeurs complexes de  $\tilde{r}_n$  et  $\tilde{d}_n$  (i.e. traiter séparément les composantes  $\sin \omega_n t$  et  $\cos \omega_n t$ )

# Filtre optimal

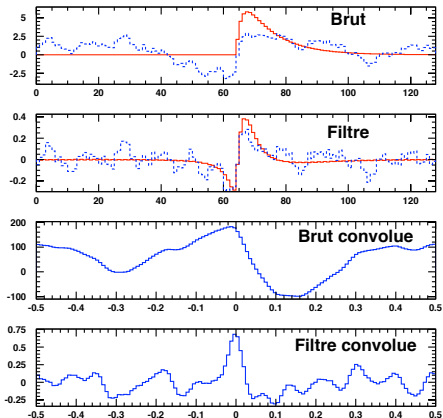
La convolution effectuée correspond à l'application du filtre "optimal" (où de Weiner):

$$\tilde{h}_n = \frac{1}{\langle \tilde{r} \cdot \tilde{r} \rangle_b} \frac{\tilde{r}_n^*}{\sigma_n^2}$$



# Filtre optimal

Exemple avec un pulse + bruit  $1/f$  + bruit blanc



# Ajustement des temps

$t_0$  peut s'ajuster en maximisant  $A(t_0)$

- ▶ en le faisant apparaître  $t_0$  dans l'expression de  $r(t - t * 0)$

$$A = \frac{1}{\langle \vec{r} \cdot \vec{r} \rangle_b} \sum_n \frac{\exp^{j\omega_n t_0} \tilde{r}_n^* \tilde{d}_n}{\sigma_n^2}$$

- ▶ en recalculant  $\tilde{r}_n$  pour différentes valeurs de  $t_0$
- ▶ en transformant le filtre  $\tilde{h}_n$  dans l'espace des temps et effectuant l'optimisation de  $A$  dans l'espace des temps:

$$\langle \vec{h}^* \cdot \vec{d} \rangle = \langle \vec{h} \cdot \vec{d} \rangle$$

## Filtre optimal?

- ▶ S'il n'y a pas de structure fine dans le filtre  $h(\omega)$ , on peut utiliser le filtre IIR équivalent
- ▶ Attention aux effets de bords!  $g(t) \neq \theta(t - t_{bord})g(t)$
- ▶ Attention si  $\sigma_n$  varie dans le temps (vérifier le  $\chi^2$ )
- ▶ Attention aux bruits corrélés en fréquence!

$$\text{Carre}(t) = \sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + \dots$$

trouver le carré moyen, puis le soustraire dans l'espace des temps est plus efficace, car tient compte de la corrélation entre les phases de toutes les harmonique.

- ▶ Attention aux empilements
- ▶ Utiliser les corrélations entre différentes voies si possible

# Conclusion

- ▶ Le traitement du signal ... c'est le traitement du bruit
  - ▶ rapport signal/bruit
- ▶ Pour éliminer le bruit de façon efficace, il faut avoir le modèle de bruit le plus précis
  - ▶ Structure en temps
  - ▶ Structure en fréquence
  - ▶ Corrélation avec d'autres signaux dans l'expérience
- ▶ C'est comme la musique: c'est du bruit tant qu'on n'a pas reconnu sa mélodie et son rythme.