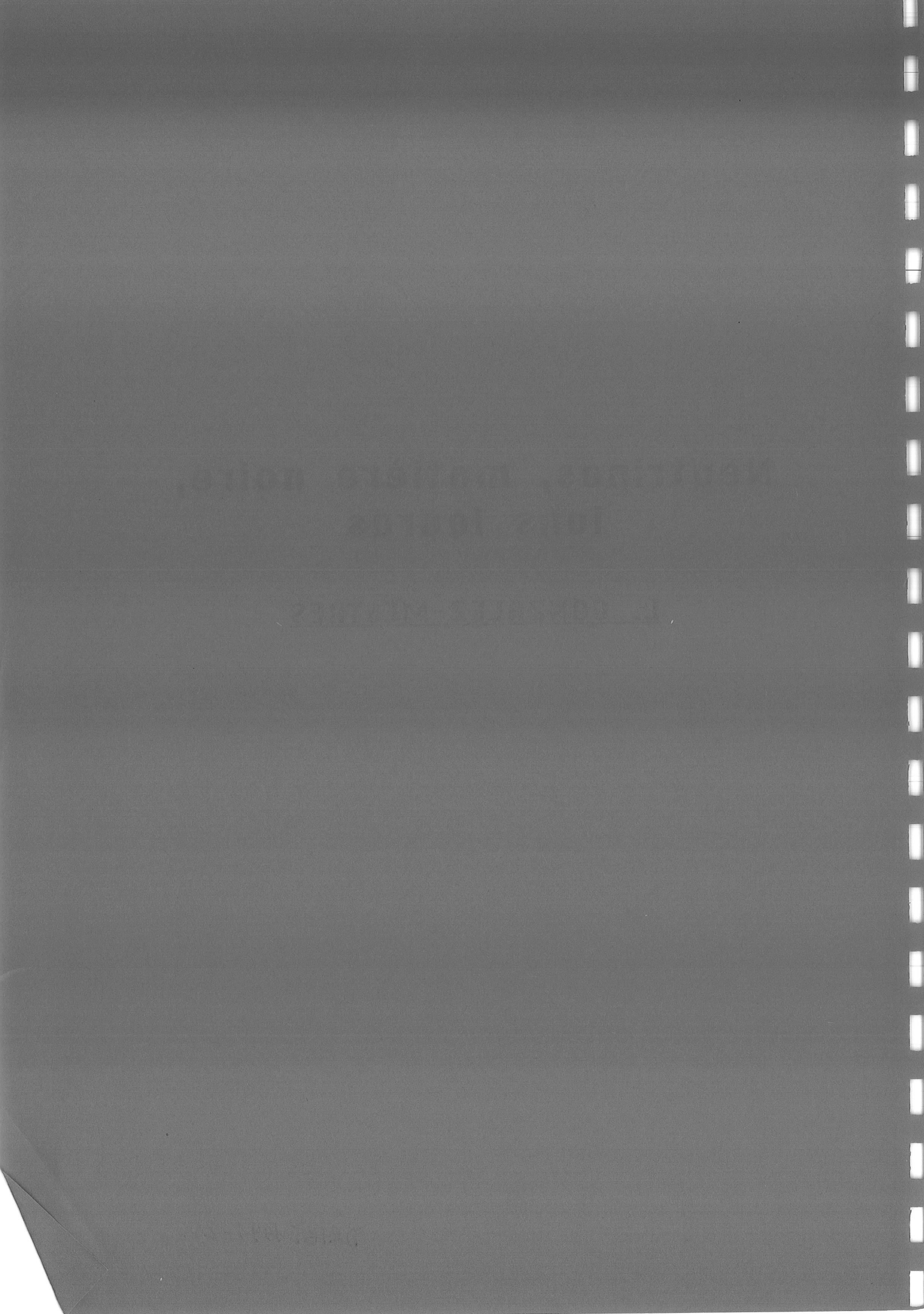


**Neutrinos, matière noire,
ions lourds**

L. GONZALEZ-MESTRES

DRTBT 1991-20.



AUSOIS, DECEMBRE 1991

ESPACE,
TEMPS,
VIDE,
PARTICULES

... ET

MATIÈRE CONDENSÉE

(2)

Diogène Laërce, IX

" VOICI LES THÉORIES DE DEMOCRITE :

A L'ORIGINE DE TOUTES CHOSES, IL Y A

LES ATOMES ET LE VIDE

TOUT LE RESTE N'EST QUE SUPPOSITION.

LES MONDES SONT ILLIMITÉS, ENGENDRÉS

ET PÉRISSABLES.

RIEN NE NAÎT DU NÉANT, NI NE RETOURNE
AU NÉANT "

Aristote, Physique II

" POUR ... (DEMOCRITE), ET NOTRE CIEL ET
TOUS LES MONDES ONT POUR CAUSE LE HASARD;
CAR C'EST DU HASARD QUE PROVIENT LA
FORMATION DU TOURBILLON ET LE MOUVEMENT
QUI A SÉPARÉ LES ÉLÉMENTS ET CONSTITUÉ
L'UNIVERS DANS L'ORDRE OÙ NOUS LE VOYONS "

MOTS-CLÉ DE LA PHYSIQUE DES PARTICULES

- RELATIVITÉ

• Géométrie de l'espace-temps : l'espace euclidien ne semble pas décrire la réalité physique, il faut le remplacer par l'espace-temps de Minkowski

→ Espace euclidien : notion absolue de distance spatiale, temps absolu $d\vec{x} \rightarrow |d\vec{x}|^2$ absolu à un instant donné, $|dt|$ absolu

Mais incompatible avec les lois de l'électromagnétisme (équations de Maxwell)

→ Espace de Minkowski : plus de $|d\vec{x}|^2$, $|dt|$ absolus, mais : $ds^2 = |d\vec{x}|^2 - c^2 dt^2$
 $c =$ vitesse de la lumière, vitesse limite

Transformation de Lorentz entre deux repères de vitesse relative \vec{v} selon l'axe des x :

$$x' = \frac{x + vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t + v/c^2 x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Contraction de Lorentz : longueur d'une règle au repos dans le repère initial :

$$\Delta x \rightarrow \Delta x' = \Delta x / \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

⇒ Equivalence masse \leftrightarrow énergie : $E^2 - \vec{p}^2 = m^2 c^4$

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \begin{cases} \rightarrow mc^2 (v=0) \\ \rightarrow \infty \text{ pour } v \rightarrow c \end{cases}$$

— MECANIQUE QUANTIQUE

Les particules élémentaires sont des objets quantiques, à la fois ondes et corpuscules. Elles ont aussi un mouvement de rotation interne (spin).

⇒ Une particule élémentaire est décrite par une fonction d'onde avec $2s+1$ composantes complexes.

Le spin est quantifié : $|\vec{S}| = s\hbar$, entier (bosons) ou demi-entier (fermions). La projection de \vec{S} sur un axe est aussi quantifiée :

$$S_z = \underbrace{-s, -s+1, \dots, s-1, s}_{2s+1}$$

La fonction d'onde ψ peut interférer avec elle-même (la diffraction existe pour les électrons) et a le sens d'une densité de probabilité :

$$\psi_n(\vec{x}, t) \quad (n = -s, -s+1, \dots, s)$$

$|\psi_n(\vec{x}, t)|^2 =$ Probabilité de trouver, à l'instant t , la particule au point \vec{x} avec $S_z = n$.

Les phénomènes quantiques sont aléatoires (e.g.) la désintégration β , α ou γ , on n'a pas de déterminisme au niveau corpusculaire. Mais la fonction d'onde suit quant à elle, une loi d'évolution déterministe.

$$\text{NORMALISATION : } \sum_n \int d^3\vec{x} |\psi_n(\vec{x}, t)|^2 = 1$$

- CHAMP DE FORCES, PARTICULE REELLE ET PARTICULE VIRTUELLE

Il a fallu tout le XIX^{ème} siècle pour comprendre l'identité entre la lumière et le champ électromagnétique.

Equations de Maxwell:

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad \text{div } \vec{H} = 0 \quad (\text{pas de monopoles})$$

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}; \quad \text{div } \vec{E} = 4\pi \rho$$

Dans le vide, on peut écrire ($\rho=0, \vec{j}=0$):

$$(\phi=0) \quad \vec{H} = \text{rot } \vec{A}, \quad \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \vec{A} = \text{potentiel vecteur}$$

$$\text{rot rot } \vec{A} = -\Delta \vec{A} + \text{grad div } \vec{A} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}$$

$$\Rightarrow \Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \square \vec{A} \text{ (d'Alembertien)} = -\text{grad div } \vec{A}$$

Mais, $\text{div } \vec{E} = 0 \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \text{div } \vec{A} = 0$, et on peut prendre: $\text{div } \vec{A} = 0$

On arrive donc à:

$$\square \vec{A} = \Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0$$

Equation de d'Alembert
ou équation d'ondes

\Rightarrow identique à l'équation de propagation de la lumière dans le vide (\square invariant relativiste)

lumière \longleftrightarrow photons réels

forces électromagnétiques \longleftrightarrow photons "virtuels"

PARTICULES REELLES ET PARTICULES VIRTUELLES

$$\vec{A} = \sum_{\vec{k}} \vec{a}(\vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad \text{dans le vide}$$

Champ électromagnétique = lumière (classique)

$$\omega = ck, \text{ relation de dispersion pour } p, \vec{j} = 0$$

$$\text{div } \vec{A} = 0 \text{ (pas de polarisation longitudinale)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{a}(\vec{k}) \cdot \vec{k} = 0$$

QUANTIFICATION: $\vec{k} = 2\pi \vec{p}/h$, $\omega = 2\pi E/h$ (photon)

Une onde plane $e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$ est un "état propre" de l'énergie et la quantité de mouvement :

$$\vec{p} = -\frac{i}{2\pi} h \vec{\nabla}, \quad E = \frac{i}{2\pi} h \frac{\partial}{\partial t} \quad h = \text{cte. de Planck}$$

Le champ électromagnétique devient ainsi la fonction d'onde du photon (à la normalisation près, car le champ e.m. classique décrit un grand nombre de photons, et la fonction d'onde quantique un seul photon : $\sum_{i=1,2} \sum_{\vec{k}} |\vec{a}_i(\vec{k})|^2 = 1$, $\sum_{\vec{k}} \sim \int d^3k$)

Si elle a une impulsion bien définie, l'onde plane n'est localisée nulle part: PRINCIPE D'INCERTITUDE

$$\Delta p \Delta x \gtrsim h$$

$$\Delta E \Delta t \gtrsim h$$

e.g. $\Delta t =$ durée de vie, $\Delta E =$ largeur de la raie

En présence d'un courant ou d'une charge électriques:

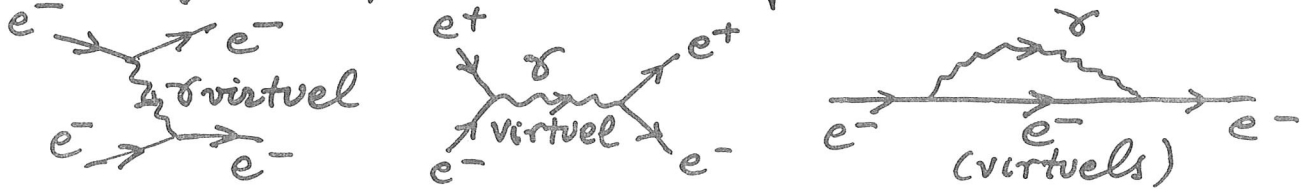
$\square \vec{A} \neq 0 \Rightarrow \omega \neq ck \Rightarrow$ on a affaire à des photons "virtuels" créés par ces courants et charges \Rightarrow

\Rightarrow description quantique de l'interaction électromagnétique

PARTICULES VIRTUELLES

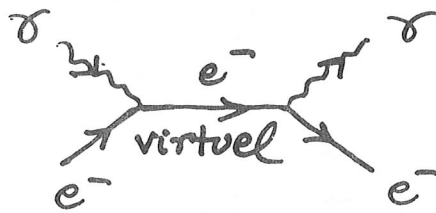
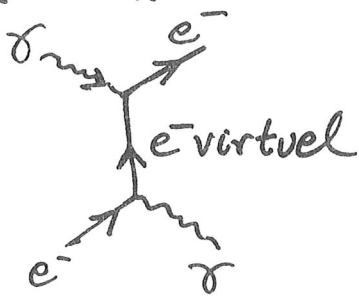
Si $\Delta E = E - cp \Rightarrow$ le photon virtuel a une durée de vie $\sim \frac{h}{\Delta E}$

Echange ou production de photons virtuels:



En présence d'interactions, toutes les particules peuvent exister à l'état virtuel ($E^2 - \vec{p}^2 \neq m^2 c^4$)

$(\square - \frac{4\pi^2}{h^2} m^2 c^4) \psi = 0$ en absence d'interactions
 $(\square - \frac{4\pi^2}{h^2} m^2 c^4) \psi \neq 0$ en absence d'interactions



Graphes de Feynman

(ELECTRODYNAMIQUE QUANTIQUE)

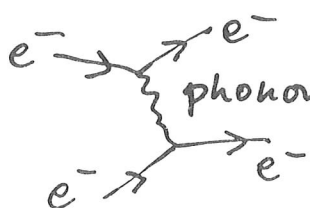


\rightarrow POLARISATION DU VIDE

ANALOGIE AVEC LA MATIERE CONDENSEE: (SUPRA)

Problème de Cooper dans les métaux: comment former la phase superfluide des électrons? L'interaction électromagnétique étant répulsive.

REPONSE: ECHANGE DE PHONONS VIRTUELS



\Rightarrow peut compenser la répulsion coulombienne \Rightarrow ORIGINE DE LA SUPRACONDUCTIVITÉ (paires de Cooper)

\rightarrow ANALOGIE: PHOTON \leftrightarrow PHONON, VIDE \leftrightarrow ETAT FONDAMENTAL

BOSONS ET FERMIONS

On démontre en théorie quantique des champs, que :

- Les particules avec spin demi-entier sont des fermions : la fonction d'onde d'un système à deux particules identiques est antisymétrique par rapport à l'échange de deux particules :

Deux fermions identiques ne peuvent pas occuper le même état quantique

e.g. électron, proton, neutrino, He_3 , ...

- Les particules avec spin entier sont des bosons, i.e. la fonction d'onde d'un système à deux particules identiques est symétrique par rapport à l'échange de deux particules.

La présence d'un ou plusieurs bosons dans un état quantique favorise l'accès d'autres bosons identiques au même état

e.g. photon, W^\pm , Z^0 , He_4 ...

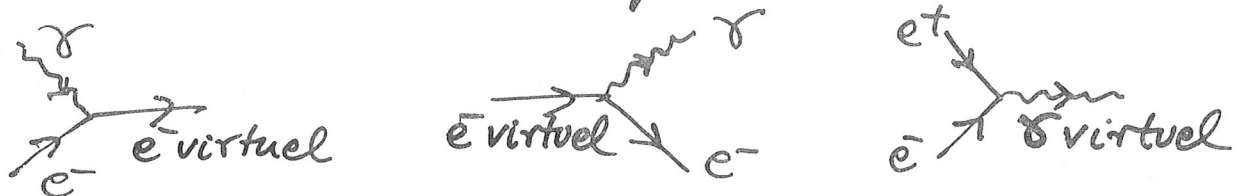
(émission stimulée, condensation de Bose, ...)

Les BOSONS DE JAUGE (γ , W^\pm , Z^0 , gluons...) jouent un rôle très spécifique en physique des particules : ils sont les porteurs des interactions fondamentales

NOTION DE CHAMP QUANTIQUE

On a quantifié une première fois le champ électromagnétique, le transformant en fonction d'onde du photon. Mais cette quantification ne permet pas de décrire un système à n photons, pas plus que les processus d'émission, absorption, création, annihilation...

Par ailleurs, on n'a justifié nulle part l'origine dynamique des graphes de Feynmann. A quel moment sont introduits les processus de vertex?



REPOSE: DEUXIÈME QUANTIFICATION

Revenons au champ électromagnétique classique:

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \sum_{\vec{k}} \vec{a}(\vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}, \quad \vec{a}(\vec{k}) \cdot \vec{k} = 0$$

On écrira:

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \sum_{\vec{k}} \sum_{i=1,2} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \left(a_{\vec{k}}^i \vec{E}_{\vec{k}}^i e^{i\omega t} + b_{\vec{k}}^{i \rightarrow -i} \vec{E}_{\vec{k}}^i e^{-i\omega t} \right)$$

$\vec{E}_{\vec{k}}^i \cdot \vec{k} = 0$, $\vec{E}_{\vec{k}}^i$ états de polarisation, $a_{\vec{k}}^i$ annihile un photon de polar. $\vec{E}_{\vec{k}}^i$ et impulsion $-\vec{k}$, $b_{\vec{k}}^{i \rightarrow -i}$ crée un photon de polar. $\vec{E}_{\vec{k}}^i$ et impulsion \vec{k} .

Un vertex électromagnétique fait intervenir le produit de trois opérateurs: 2 pour l'électron, 1 pour

TOUTES LES PARTICULES ELEMENTAIRES SONT DECRISES PAR DES CHAMPS QUANTIQUES

e.g. particule sans spin et avec charge électrique:
→ champ scalaire complexe ϕ ; $\bar{\phi}$

$$\phi = \sum_{\vec{k}} \left(a_{\vec{k}}^{\dagger} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t} + b_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r} + \omega t} \right)$$

$$\omega = \sqrt{k^2 + \frac{4\pi^2}{h^2} m^2 c^4} \quad (\text{condition d'Einstein } E^2 = \vec{p}^2 + m^2 c^4)$$

$$\bar{\phi} = \sum_{\vec{k}} \left(a_{\vec{k}} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r} + \omega t} + b_{\vec{k}}^{\dagger} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t} \right)$$

$a_{\vec{k}}^{\dagger}$ crée une particule chargée d'impulsion $\frac{h\vec{k}}{2\pi}$

$a_{\vec{k}}$ annihile " " " " " "

$b_{\vec{k}}^{\dagger}$ crée son antiparticule avec impulsion $-\frac{h\vec{k}}{2\pi}$

$b_{\vec{k}}$ annihile " " " " " "

LES EQUATIONS DE MOUVEMENT DE CES CHAMPS
QUANTIQUES DETERMINENT L'EVOLUTION DE
N'IMPORTE QUEL SYSTEME

Deux formulations possibles:

a) Hamiltonienne: on écrit l'énergie en fonction des
opérateurs de champ et l'équation d'évolution

$$\frac{i}{2\pi} h \frac{\partial |\psi\rangle}{\partial t} = H |\psi\rangle \quad (H = \text{hamiltonien} = \text{énergie})$$

b) Lagrangienne: on écrit le lagrangien en
fonction des opérateurs de champ et on applique
le principe de moindre action

QUE SOMMET-NOUS EN TRAIN DE FAIRE ?

On peut montrer que les propriétés d'un couple d'opérateurs $a_{\vec{k}}^\dagger, a_{\vec{k}}$ sont formellement identiques à celles d'un couple d'opérateurs :

$$a^\dagger = \sqrt{\frac{\pi}{h}} \left(\sqrt{m} \omega x - i \frac{p}{\sqrt{m}} \right), \quad a = \sqrt{\frac{\pi}{h}} \left(\sqrt{m} \omega x + i \frac{p}{\sqrt{m}} \right)$$

dans un pendule quantique (limite des petites vibrations)

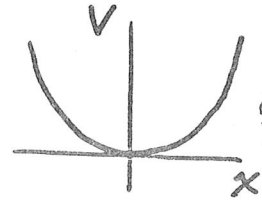


$$\theta \ll 1, \quad \sin \theta \approx \theta$$

$$E = H = \underbrace{\frac{1}{2} \frac{p^2}{m}}_T + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$$

= énergie cinétique

= énergie potentielle



En mécanique quantique :
puits de potentiel
→ niveaux d'énergie quantifiés

Equation d'onde quantique :

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} = \left(E - \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \right) \psi$$

Note - x^2 , premier terme d'une série ?

Solutions : niveaux d'énergie quantifiés

$$E = (n + 1/2) \hbar \omega, \quad \psi_n(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi \hbar} \right)^{1/4} \frac{1}{2^{n/2} \sqrt{n!}} F_n(x)$$

$$E_0 = 1/2 \hbar \omega$$

$$F_n(x) = e^{-m\omega \frac{x^2}{2\hbar}} H_n \left(x \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \right) \quad H_n, \text{ f. d'Hermite}$$

$$H_n(\xi) = (-1)^n e^{\xi^2} \left(\frac{d}{d\xi} \right)^n (e^{-\xi^2}) \quad \hbar = \frac{h}{2\pi}$$

On remarquera que l'énergie des états augmente d'unité en unité \Rightarrow ANALOGIE :

$|\psi_n\rangle \longleftrightarrow$ Etat à n particules (bosons)

$|\psi_0\rangle \longleftrightarrow$ vide (mais, alors, il a une énergie !)

$\hbar \omega \longleftrightarrow$ énergie de la particule

ENERGIE DU VIDE : L'EFFET CASIMIR

Nous venons d'obtenir les champs quantiques à partir des champs classiques de la façon suivante :

1. Décomposer le champ en modes de Fourier
2. Pour chaque mode de Fourier, introduire un oscillateur harmonique quantique, représentant la particule (avec tous les états à n particules)
3. Le cas échéant, compléter avec un deuxième oscillateur représentant l'antiparticule

Mais, à cause du principe d'incertitude, l'état fondamental (mode "0 particules") d'un oscillateur harmonique a une énergie $\frac{1}{2} \hbar \omega \neq 0$

⇒ Le vide (état à 0 particules) aurait une énergie :

$$E_{\text{vide}} = \sum_{\vec{k}} \frac{1}{2} \hbar \omega(\vec{k}) = \infty \quad (!!)$$

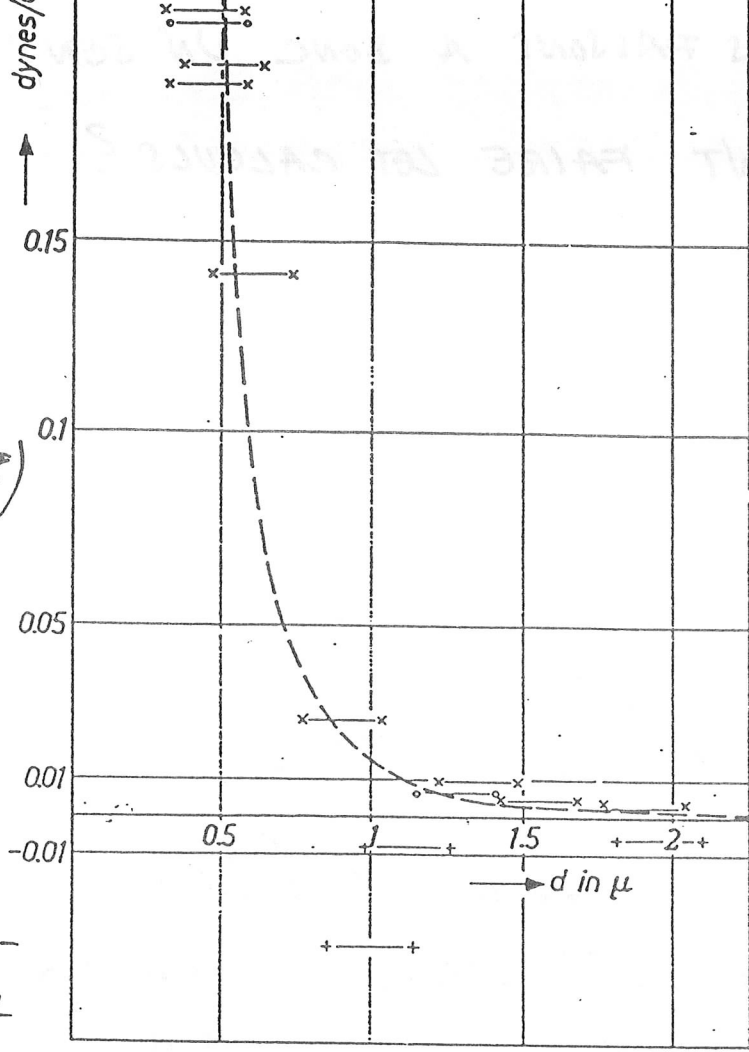
Pas grave, on décalera le "point zéro" d'une constante infinie, et on redéfinira :

$$E_{\text{mesurée}} = E - E_{\text{vide}} \quad (\text{"renormalisation"})$$

Question : Existe-t-il un effet observable de l'énergie du vide ? Réponse, oui : effet CASIMIR

Energie du champ électromagnétique à l'état fondamental (vide, absence de sources électromagnétique, classiquement $\vec{A} = 0$, ψ (potentiel coulombien) = 0)

Expérience de SPARNAAY (Lab. Philips, Eindhoven 1958) Mesure de la force entre deux plaques métalliques (conducteurs presque parfaits) en fonction de la distance



(Casimir)⁽¹⁾
Prédiction théorique:
 $F =$
 $= 0.013 d^{-4}$
dynes/cm²
 d en μm
Excellent accord avec l'expérience

Fig. 4. Results \times — \times chromium steel \circ — \circ chromium. Uncertainty of the determination of the distance between the plates is indicated by drawing horizontal lines instead of points. Any given measurement was often repeated. Some repulsions between aluminium plates are also given. (+—+). ----- Casimir's relation (eq. 1).

L'effet de confinement entre deux plaques conductrices agit sur le champ électromagnétique, même lorsque celui-ci se trouve à l'état fondamental (le vide)

On mesure la force entre deux plaques conductrices, largeur L , distance d : $F_L = \frac{dE}{dd}$



$$E = E_{\text{vide (plaques)}} - E_{\text{vide (sans plaques)}} \quad (= \infty - \infty !!)$$

$$E_{\text{vide}} = \sum_{\vec{k}} \frac{1}{2} \hbar |\vec{k}| \quad \text{Différence: spectre de } \vec{k} !!$$

Plaques $\rightarrow \vec{k}_{\perp}$, composante de \vec{k} perp. aux plaques est quantifiée \rightarrow on trouve: $E = -\frac{\pi^2}{720} \frac{\hbar c}{d^3} L^2$, finie !!
 $F = -\frac{\pi^2}{240} \frac{\hbar c}{d^4} L^2$, mesurable

CE QUE NOUS FAISONS A DONC UN SENS...

MAIS, COMMENT FAIRE LES CALCULS ?

● CHAQUE COMPOSANTE DE FOURIER CONTIENT UNE OU PLUSIEURS "PENDULES QUANTIQUES"

● IL FAUT RAJOUTER DES INTERACTIONS, COUPLER ENTRE EUX LES DIFFERENTS "PENDULES"

e.g. champ scalaire chargé de masse sans interaction

$$E = H = \sum_{\vec{k}} \omega_{\vec{k}} \left(\underbrace{a_{\vec{k}}^{\dagger} a_{\vec{k}}}_{n(\vec{k})} + \underbrace{b_{\vec{k}}^{\dagger} b_{\vec{k}}}_{\bar{n}(\vec{k})} \right) \frac{\hbar}{2\pi}$$

particule antiparticule n pour "particules" \bar{n} pour "antiparticules"

comme dans l'oscillateur harmonique

Dans la limite de \vec{k} continu, on remplace la somme par une intégrale: $\sum_{\vec{k}} \rightarrow \int \frac{d^3\vec{k}}{\omega_{\vec{k}}}$

Et, en fonction des champs $\bar{\phi}(x), \phi(x)$ on arrive à :

$$H = \int d^3\vec{x} \mathcal{H} \quad \mathcal{H} = \text{densité hamiltonienne}$$

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \left[\underbrace{\frac{\partial \bar{\phi}(x,t)}{\partial t} \frac{\partial \phi(x,t)}{\partial t}}_{\text{Energie cinétique}} + \underbrace{\vec{\nabla} \bar{\phi}(x,t) \cdot \vec{\nabla} \phi(x,t) + m^2 \bar{\phi} \phi}_{\text{Energie potentielle}} \right]$$

on trouve :

Or, en mécanique classique on a souvent recours à la formulation lagrangienne: $L = T - V$, et principe de moindre action.

De même ici, on traite les champs quantiques comme un simple système mécanique et on écrit :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial t} - \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{\nabla} \phi + m^2 \bar{\phi} \phi + \text{interaction} \right]$$

densité lagrangienne (invariant relativiste) e.g. $(\bar{\phi} \phi)^2$

(15)

UN "SIMPLE" SYSTEME MECANIQUE... DANS UN ESPACE-TEMPS GALILEEN "CLASSIQUE"

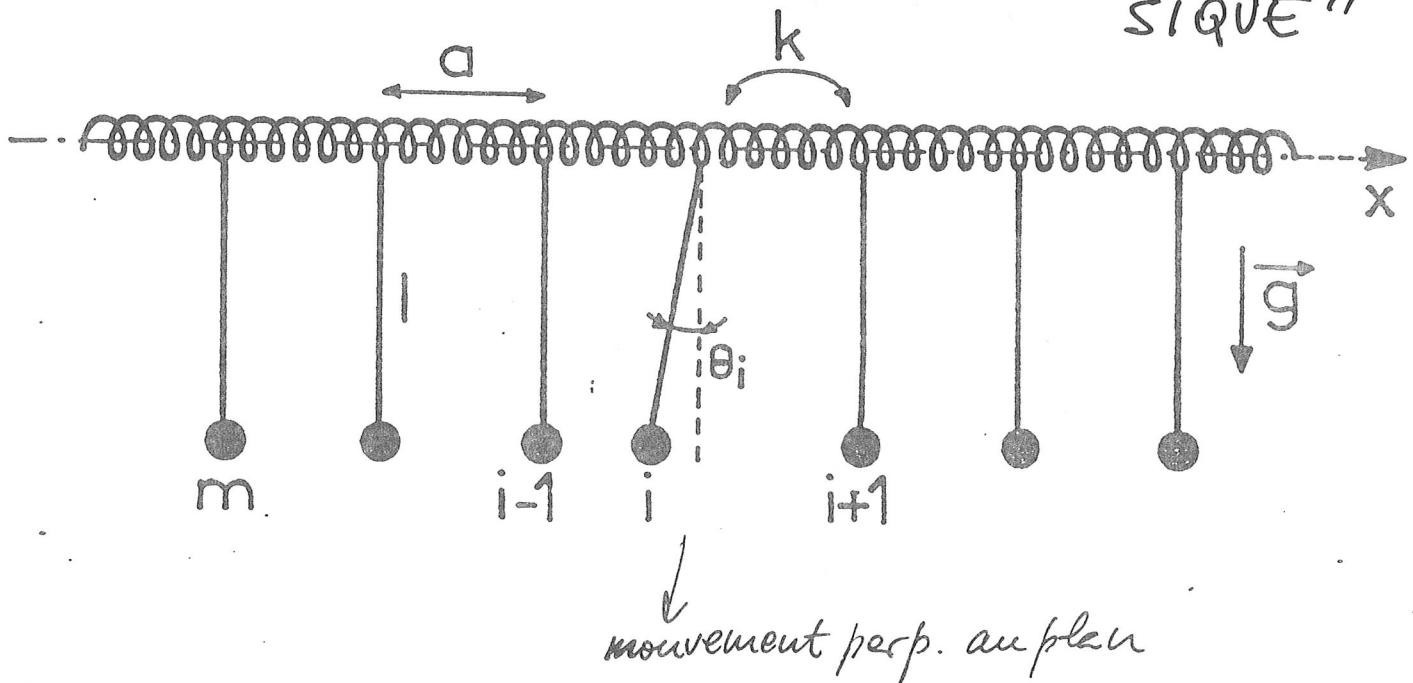


Figure 2.1 : Schéma descriptif de la chaîne de pendules couplés élastiquement par des ressorts de torsion.

Système de N (très grand) pendules couplés

Couple linéaire de rappel : $T_i = k\theta_i$

I = moment d'inertie de chaque pendule

l = longueur

$$I \frac{d^2\theta_i}{dt^2} = T_{1i} + T_{2i}$$

$$T_{1i} = -mgl \sin\theta_i \quad (\text{réaction gravitationnelle})$$

$$T_{2i} = -k(\theta_i - \theta_{i+1}) - k(\theta_i - \theta_{i-1}) \quad (\text{ressorts})$$

$$\text{Posant : } \omega_0^2 = mgl/I, \quad c_0^2 = a^2 k/l$$

on arrive à :

$$\frac{d^2\theta_i}{dt^2} - \frac{c_0^2}{a^2} (\theta_{i+1} + \theta_{i-1} - 2\theta_i) + \omega_0^2 \sin\theta_i = 0.$$

$$i = 1, 2, \dots, N$$

$$\frac{d^2 \theta_i}{dt^2} - \frac{c_0^2}{a^2} (\theta_{i+1} + \theta_{i-1} - 2\theta_i) + \omega_0^2 \sin \theta_i = 0$$

$$i = 1, 2, \dots, N-1$$

Limite du continu: $a \rightarrow 0$

$$k \gg mgl \quad \text{ou} \quad c_0^2 \gg a^2 \omega_0^2 \quad (d = \frac{c_0}{\omega_0} \gg a)$$

$$\theta_{n \pm 1} \approx \theta \pm a \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{a^2}{2!} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \dots \quad (\text{approximation continue})$$

$$\Rightarrow \theta_{i+1} + \theta_{i-1} - 2\theta_i \approx a^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$$

\Rightarrow Equation de Sine-Gordon:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \omega_0^2 \sin \theta = 0$$

\Rightarrow Echelles naturelles d'espace et de temps (equation sans dimensions): $T = \omega_0 t$, $X = \frac{\omega_0}{c_0} x$, $\frac{x}{T} = \frac{x}{c_0 t}$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial T^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \sin \theta = 0$$

On recherche une onde de forme constante dans le temps et se déplaçant à une vitesse v :

$$\theta = \theta(X - vT) = \theta(s_-), \quad s_{\pm} = X \pm vT$$

$$d\theta = \frac{\partial \theta}{\partial s_+} ds_+ + \frac{\partial \theta}{\partial s_-} ds_- = \frac{\partial \theta}{\partial s_+} (dx + v dt) + \frac{\partial \theta}{\partial s_-} (dx - v dt)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial X} = \frac{\partial}{\partial s_+} + \frac{\partial}{\partial s_-}, \quad \frac{\partial}{\partial T} = v \left(\frac{\partial}{\partial s_+} - \frac{\partial}{\partial s_-} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \theta}{\partial T^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} = (1 - v^2) \frac{\partial^2 \theta}{\partial s_-^2} = \sin \theta$$

Forme "relativiste" de l'équation de sine-Gordon:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial s_-^2} = \frac{\sin \theta}{1 - v^2} \quad (s_- = x - vt)$$

On remarquera que l'équation est singulière à une valeur caractéristique de la vitesse ($v = \pm 1$)

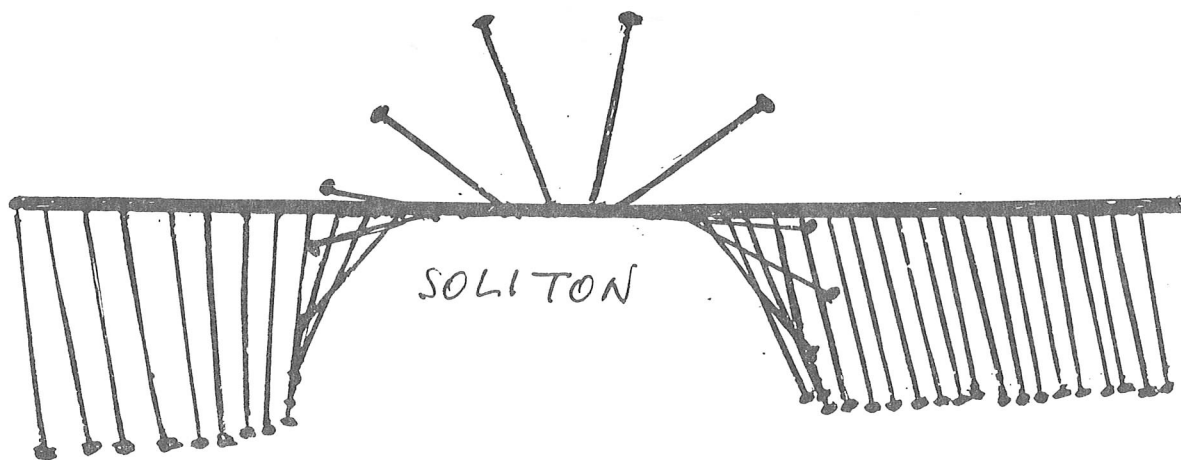
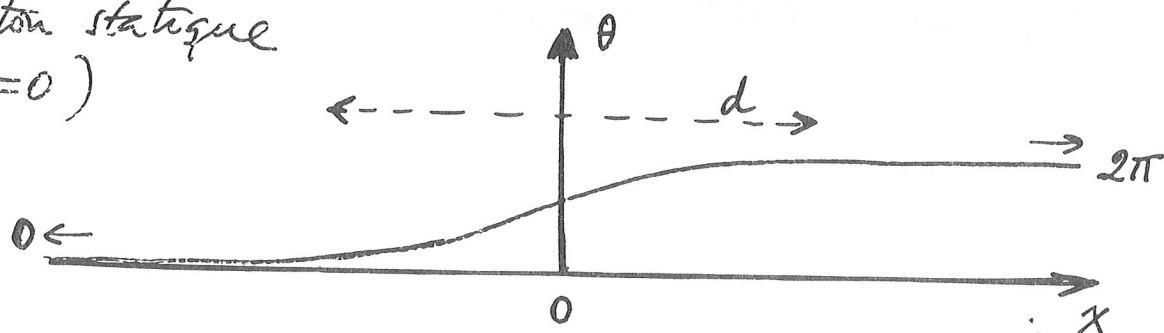
Solutions : $\theta = 4 \arctan \left[\exp \left(\pm \frac{s_- - s_0}{\sqrt{1 - v^2}} \right) \right]$

Revenant aux unités avec dimensions :

$$\theta = 4 \arctan \left[\exp \left(\pm \frac{x - vt}{d \sqrt{1 - v^2}} \right) \right]$$

$$v = V \cdot c_0, \quad d = \frac{c_0}{\omega_0}$$

Soliton statique
($v = 0$)



SYSTÈME RÉEL DE N PENDULES COUPLÉES

NATURE CORPUSCULAIRE DU SOLITON DE SINE-GORDON

On calcule l'énergie du système, limite continue

$$E = I \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} c_0^2 \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 + \omega_0^2 (1 - \cos \theta) \right] dx$$

Pour un soliton, on trouve:

$$E = \underbrace{\left(\frac{8I}{d} \right)}_m \frac{c_0^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c_0^2}}} = \frac{m c_0^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c_0^2}}}$$

Identique à l'équation d'Einstein!!

c_0 est une vitesse limite, analogue à la vitesse de la lumière. Mais, c_0 est donnée par la dynamique du milieu matériel, non par une géométrie de l'espace-temps.

Pour $|v| > c_0$, θ est imaginaire \Rightarrow solutions non physiques $\Rightarrow |v| \leq c_0$ pour les solitons "physiques"

Sommes-nous dans un vrai monde "relativiste" ?

a) Contraction de Lorentz:

$$\theta = 4 \arctan \left[\exp \left(\pm \frac{x - vt}{d \sqrt{1 - v^2/c_0^2}} \right) \right]$$

Largeur du soliton : $\Delta x = d \sqrt{1 - v^2/c_0^2}$

$\nearrow d$ pour $v = 0$
 $\searrow \rightarrow 0$ pour $v \rightarrow c_0$

b) Invariance relativiste de l'équation

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \omega_0^2 \sin \theta = 0$$

par rapport à une transformation de Lorentz de "vitesse de la lumière" = c_0

BILAN:

- SI LE VIDE EST UNE ENTITE MATERIELLE (AU POINT DE GENERER DES FORCES, e.g. effet Casimir), C'EST DE TOUTE EVIDENCE LA VRAIE MATIERE, ET LES "PARTICULES" N'EN SONT QUE DES EXCITATIONS. (C'est aussi de la géométrie de l'espace et du temps?)

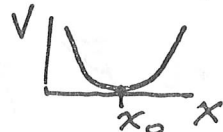
Analogie avec la matière condensée:

Vide \leftrightarrow état fondamental

Particules \leftrightarrow phonons, quasiparticules, défauts...

Espace, temps \leftrightarrow ?? Rapport avec la matière ??

- LA THEORIE QUANTIQUE DES CHAMPS EST UNE THEORIE PHENOMENOLOGIQUE: ON DECRIT LES SYSTEMES A N PARTICULES PAR DES MODES D'UN SYSTEME D'OSCILLATEURS HARMONIQUES



Tout fruits de potentiel peut être approximé, près du minimum, par un oscillateur harmonique

$$V(x) = \cancel{V(x_0)} + \frac{1}{2} V''(x_0) (x-x_0)^2 + \frac{1}{6} V'''(x_0) (x-x_0)^3 + \dots$$

Redéfinition du zéro

Approximation "harmonique"

- NEAMMOINS, LES RESULTATS DE LA QFT SONT SPECTACULAIRES: e.g. Electrodynamique Quantique

(malgré le fait qu'on manipule des infinis...)

Moment magnétique de l'électron: (QED)

Calcul dû à Kinoshita: $\mu_e = 1.00115965245 \pm 2 \cdot 10^{-10}$

Meilleure valeur expérimentale: $1.00115965221 \pm 3 \cdot 10^{-10}$

(ex. magnétons de Bohr)

10^{-10}

INTERACTIONS ENTRE PARTICULES

THEORIES DE JAUGE

La notion d'invariance de jauge a son origine dans l'électrodynamique classique

- Les équations de Maxwell décrivent l'ensemble de l'électromagnétisme classique, faisant intervenir uniquement: \vec{E} , \vec{B} , ρ et \vec{j}

- On introduit, toutefois, les potentiels électromagnétiques par les équations:

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad } \phi, \quad \vec{B} = \text{rot } \vec{A}$$

- (\vec{A}, ϕ) forme un "quadrivecteur" de Lorentz: ça se transforme comme (\vec{x}, t) ou (ρ, \vec{j})

- \vec{E} et \vec{B} forment le tenseur de champ électromagnétique: $F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}$

$$F_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix} = -F_{\nu\mu}$$

- \vec{A} et ϕ ne sont pas uniques: on appelle transformation de jauge toute transformation de \vec{A} et ϕ qui laisse \vec{E} et \vec{H} inchangés

e.g. $A_\mu \rightarrow A_\mu + \frac{\partial \alpha}{\partial x^\mu}$ $\alpha(x)$ arbitraire
 $F_{\mu\nu}$ inchangé'

- En outre, le champ électromagnétique décrit par (\vec{A}, ϕ) possède deux degrés de liberté "superflus" 4 contre deux états de polarisation de la lumière
- Pourquoi, alors, quantifier le champ électromagnétique à partir des potentiels vecteurs, plutôt que directement à partir de \vec{E} et \vec{B} ?
- Réponse: C'est le potentiel quadrivecteur qui contient toute l'information nécessaire à la PHYSIQUE QUANTIQUE

Exemple:

EFFET AHARONOV-BÖHM

On introduit l'interaction d'une particule chargée avec le champ électromagnétique par le remplacement:

$$p_\mu \rightarrow p_\mu - \frac{e}{c} A_\mu$$

dans les équations de mouvement, et quantiquement

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial x_\mu} \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial x_\mu} - \frac{e}{c} A_\mu(x)$$

Classiquement, on arrive à:

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} = e\vec{E} + \frac{e}{c} \vec{v} \wedge \vec{B} \quad (\text{plus de } A_\mu)$$

Mais, quantiquement, on n'arrive pas à éliminer le potentiel vecteur et tout exprimer en termes de $F_{\mu\nu}$! Ceci est vrai, déjà, pour une particule quantique en présence d'un champ électromagnétique classique

EXPERIENCE D'AHARONOV-BÖHM

FAITE PAR TONOMURA (Hitachi Ltd, 1986)

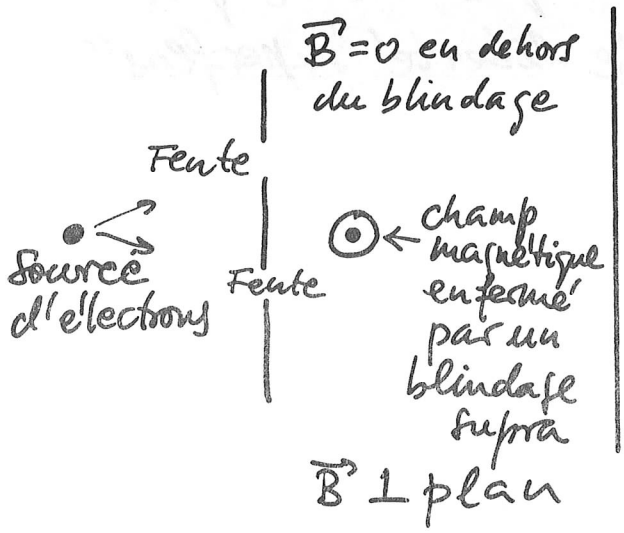


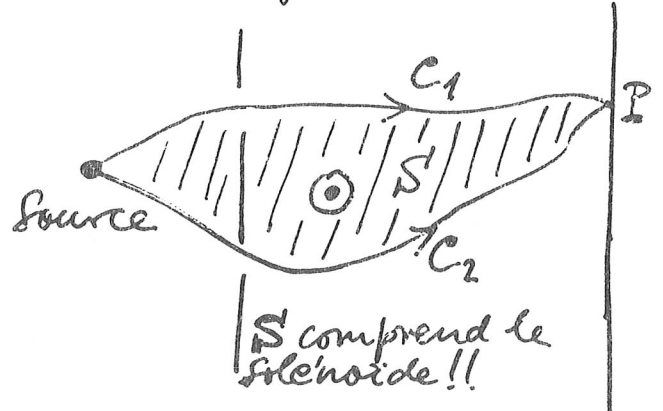
Figure d'interférence des électrons, à étudier en fonction du champ magnétique \vec{B}

⇒ Electrodynamique "classique": à l'extérieur du blindage, $\vec{B} = 0$. Comme les électrons ne peuvent pas traverser le blindage, la figure d'interférence devrait être indépendante de \vec{B}

⇒ Traitement quantique: ce qui vient d'être dit est en réalité faux! Car on a:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial x_\mu} = (p_\mu + \frac{e}{c} A_\mu) \psi \quad p_\mu = \text{impulsion initiale}$$

et l'interférence entre deux chemins:



Fait intervenir le facteur de phase:

$$e^{-i \int_{C_1-C_2} d\vec{x} \cdot \vec{A}} \frac{e}{c\hbar}$$

Mais $C_1 - C_2$ est un contour fermé, et on a:

$$\int_{C_1-C_2} d\vec{x} \cdot \vec{A} = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} \neq 0 \text{ même si } \vec{B} = 0 \text{ à l'extérieur du blindage}$$

⇒ Franges d'interférence dépendant de B !!

LE POTENTIEL ELECTROMAGNETIQUE POSSEDE, DONC, AU NIVEAU QUANTIQUE, UNE SIGNIFICATION QUI N'APPARAISAIT PAS AU NIVEAU CLASSIQUE

MAIS QUELLE EST SA VRAIE ORIGINE; ET QUE REPRESENTE LE CHAMP ELECTROMAGNETIQUE QUI EST DEVENUE L'INVARIANCE DE JAUGE?

ECRIVONS LE LAGRANGIEN DU CHAMP SCALAIRE EN PRESENCE D'UN CHAMP ELECTROMAGNETIQUE. LE TERME $\partial_\mu \bar{\phi} \partial^\mu \phi$ DEVIENT: ($\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$)

$$\partial_\mu \bar{\phi} \partial^\mu \phi \rightarrow \left[\partial_\mu \bar{\phi} - i \frac{e}{\hbar c} A_\mu \bar{\phi} \right] \left[\partial^\mu \phi + i \frac{e}{\hbar c} A_\mu \phi \right]$$

↑ signes différents ↑

car particule et antiparticule ont des charges de signe opposé!

Cette expression n'est pas invariante par une transformation de jauge: $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \alpha$

Mais elle est invariante par rapport à la transformation:

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \alpha, \phi(x) \rightarrow e^{-i \frac{e}{\hbar c} \alpha(x)} \phi(x) \\ \bar{\phi}(x) \rightarrow e^{i \frac{e}{\hbar c} \alpha(x)} \bar{\phi}(x)$$

L'invariance de jauge apparaît donc liée à des transformations agissant sur le champ de la particule chargée: la phase complexe du champ scalaire chargé est liée à l'électromagnétisme

⇒ OUVRE LA VOIE À UNE FORMULATION GEOMETRIQUE DE L'ELECTRODYNAMIQUE

PROBLEME: COMMENT DEFINIR, DANS CHAQUE POINT DE L'ESPACE, LA PHASE D'UN CHAMP COMPLEXE? QUEL "ORIGINE DE PHASES" PRENDRE DANS CHAQUE POINT DE L'ESPACE?

Si je change l'origine des phases d'un facteur $e^{i\frac{e}{\hbar c}\alpha(x)} \rightarrow$ je change $\phi(x)$ en $e^{-i\frac{e}{\hbar c}\alpha(x)} \phi(x)$

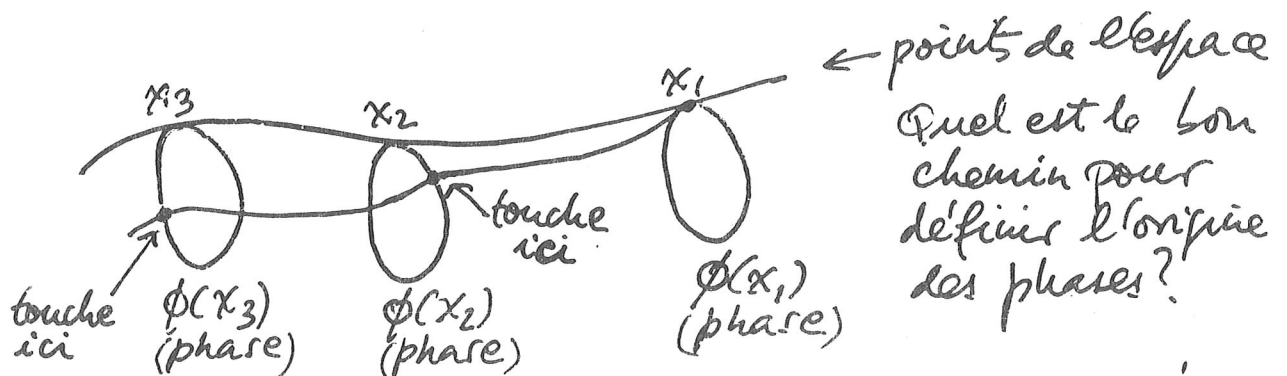
AVEC UN LAGRANGIEN SANS CHAMP ELECTROMAGNETIQUE, JE NE SAURAI QUOI FAIRE, CAR LE TERME $\partial_\mu \bar{\phi} \partial_\mu \phi$ N'EST PAS BIEN DEFINI! IL VARIE SI JE FAIS VARIER L'ORIGINE DES PHASES

Si $\phi(x) \rightarrow e^{-i\frac{e}{\hbar c}\alpha(x)} \phi(x)$, alors:

$$\partial_\mu \phi(x) \rightarrow e^{-i\frac{e}{\hbar c}\alpha(x)} \left[\partial_\mu \phi(x) - i\frac{e}{\hbar c} \partial_\mu \alpha(x) \phi(x) \right]$$

se comporte avec la variation de $\partial_\mu \bar{\phi}(x)$

Nouveau terme qui pose problème si $\partial_\mu \alpha(x) \neq 0$



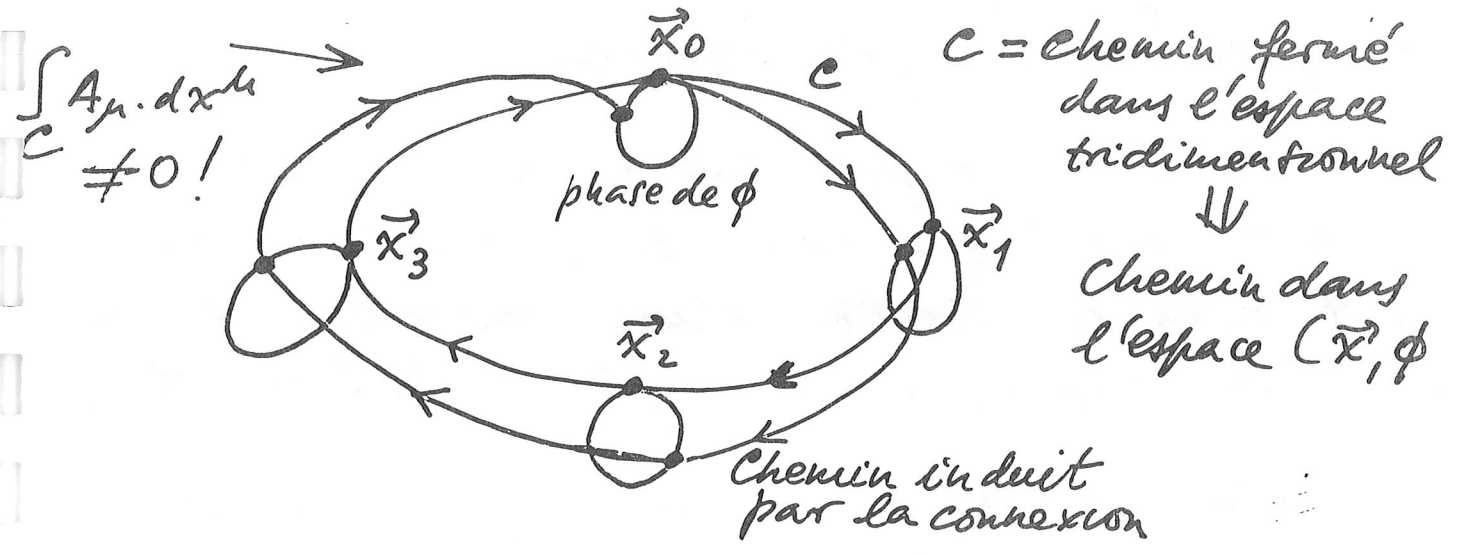
ON A BESOIN DE DEFINIR UNE CONNEXION

A chaque déplacement $x_\mu \rightarrow x_\mu + dx_\mu$ dans l'espace-temps ordinaire, l'association un déplacement $\phi(x) \rightarrow \phi(x) e^{-i\frac{e}{\hbar c} A_\mu(x) \cdot dx^\mu}$ dans la phase de $\phi(x)$.
CONNEXION

LA CONNEXION ASSOCIE A UN DEPLACEMENT INFINITESIMAL dx^μ UN DEPLACEMENT INFINITESIMAL $-\frac{e}{c\hbar} A_\mu \cdot dx^\mu$ DE LA PHASE DE $\phi(x)$

ON APPELLE A_μ LE CHAMP ELECTROMAGNETIQUE.

CE CHAMP ELECTROMAGNETIQUE INTRODUIT DES FORCES PAR UN PHENOMENE DE COURBURE



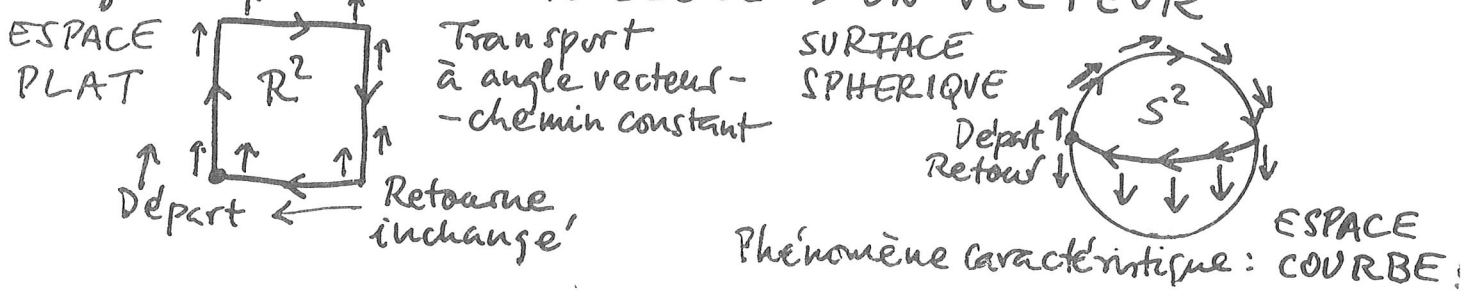
Dans le cas du dessin, après un chemin fermé commencé à \vec{x}_0 et suivant la connexion, la phase de $\phi(\vec{x})$ ne retourne pas à sa valeur de départ \Rightarrow la connexion définie par A_μ a une courbure.

Mais, $\int_C \vec{A} \cdot d\vec{x} = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$ $S =$ surface encadrée par C

Donc: $\int_C \vec{A} \cdot d\vec{x} \neq 0 \Rightarrow \vec{B} \neq 0$

On appelle le tenseur $F_{\mu\nu}$ (formé par \vec{E} et \vec{B}) TENSEUR DE COURBURE. Pourquoi courbure?

e.g. TRANSPORT PARALLELE D'UN VECTEUR



PRINCIPE DES THEORIES DE JAUGE:

- LES FORCES OBSERVEES DANS LA NATURE SONT DES MANIFESTATIONS DE LA CONNEXION GEOMETRIQUE ENTRE L'ESPACE-TEMPS "ORDINAIRE" ET DE NOUVELLES DIMENSIONS DETRIVANT LES DEGRES DE LIBERTE "INTERNES" DES PARTICULES

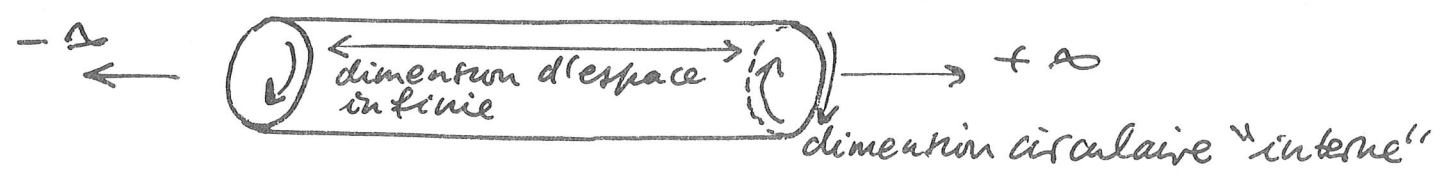
e.g. la phase complexe du champ associe à une particule chargée électriquement

En réalité, on propose souvent d'interpréter la charge électrique comme la quantité de mouvement dans la direction d'une cinquième dimension (la phase du champ complexe) Kaluza-Klein

DIMENSION DE LONGUEUR FINIE (e.g. un cercle)

- ⇒ QUANTIFICATION DE LA COMPOSANTE DE LA QUANTITE DE MOUVEMENT DANS CETTE DIRECTION
- ⇒ QUANTIFICATION DE LA CHARGE ELECTRIQUE ET D'AUTRES NOMBRES QUANTIQUES (une particule quantique se déplaçant sur un cercle a une impulsion quantifiée : $q \propto n \frac{h}{2\pi r}$) $r =$ rayon de la "dimension"

e.g. cylindre 1dim espace x 1dim "interne"



La dimension fermée "interne" serait observable uniquement à travers la charge électrique ($q=e$ serait le premier harmonique, donc pas de localisation)

- LA QUANTIFICATION DU CHAMP ELECTROMAGNETIQUE (existence du photon) TEMOIGNE DE LA FLUCTUATION QUANTIQUE DE L'ESPACE-TEMPS LORSQU'IL EST CONNEXE A CET NOUVELLES DIMENSIONS: LA CONNEXION FLUCTUE

AUTREMENT DIT, EN MECANIQUE QUANTIQUE RIEN NE PEUT RESTER IMMOBILE A CAUSE DU PRINCIPE D'INCERTITUDE: $\Delta p \Delta x \approx h \Rightarrow$ UN OBJET LOCALISE AU POINT x_0 A L'INSTANT t POSSEDE UNE INCERTITUDE INFINIE SUR L'IMPULSION ET DOIT DONC BOUGER. \Rightarrow LES "CONNEXIONS" BOUGENT COMME DES OBJETS QUANTIQUES (FLUCTUATIONS \rightarrow QUANTIFICATION DU CHAMP A_μ ET AUTRES CHAMPS ANALOGUES)

- CETTE DESCRIPTION GEOMETRIQUE DES FORCES OBSERVEES DANS LA NATURE SEMBLE AVOIR UNE VALIDITE UNIVERSELLE:

	Gravitation \leftrightarrow Groupe de Poincaré, graviton	2	<u>Spch</u>
{	Intér. électromagnétiques \leftrightarrow $U(1)$ phase complexe, photon	1	
	Intér. faibles \leftrightarrow Isospin faible $SU(2)_L$, W^\pm, Z^0	1	
	Intér. fortes \leftrightarrow Couleur $SU(3)_C$, 8 gluons	1	

1 boson de jauge ($\gamma, W^\pm, Z^0, \text{ gluons } \dots$)
pour chaque coordonnée dans l'espace "interne"

MAIS IL RESTE A COMPRENDRE LE RAPPORT ENTRE LA GEOMETRIE ET LA MATIERE: L'APPROCHE GEOMETRIQUE CACHE PEUT-ÊTRE NOTRE IGNORANCE SUR LES PROPRIÉTÉS MATÉRIELLES DU VIDE

BRISURE SPONTANÉE D'UNE SYMÉTRIE :
MECANISME DE HIGGS (inventé par
Ginzburg et Landau)
JETP 1950

NOUS VENONS DE VOIR QUE LES LOIS DE L'ELECTRO-
MAGNETISME EN PRESENCE D'UN CHAMP DE MATIERE
CHARGE SON INVARIANTES PAR RAPPORT À UNE
TRANSFORMATION DE JAUGE QUI AGIRAIT À LA FOIS
SUR $\vec{\phi}$, ϕ et A_μ

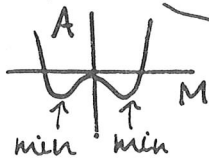
MAIS, COMMENT SE TRANSFORME LE VIDE LUI-
MEME PAR RAPPORT A DE TELLES TRANSFORMA-
TIONS ? MEME SI L'INVARIANCE DE JAUGE EST
UNE VRAIE SYMÉTRIE DES LOIS DE LA NATURE,
RIEN NE NOUS DIT QUE L'ÉTAT FONDAMENTAL
DE LA MATIÈRE DOIVE ÊTRE INVARIANT.

CONTRE-EXEMPLE : MAGNÉTISATION SPONTANÉE
TRANSITION PARAMAGNETIQUE \rightarrow FERROMAGNETIQUE
AU POINT DE CURIE (symétrie des rotations d'espace,

Energie libre d' Helmholtz :

$$A(\vec{M}, T) = A(0, T) + \alpha_2(T) |\vec{M}|^2 + \alpha_4(T) |\vec{M}|^4 + \dots$$

↓
magnétisation



gardons ces deux termes

Point λ lorsque le minimum de A cesse de se
trouver à $|\vec{M}|=0 \rightarrow \alpha_2(T) \leq 0$ ($\alpha_4 > 0$)

L'électromagnétisme reste invariant par rapport
au groupe des rotations de l'espace tridimensionnel,
MAIS L'ÉTAT FONDAMENTAL CHOISIT SPONTANÉMENT
UNE DIRECTION DE MAGNÉTISATION

Landau (1941) décrit la superfluidité un terme d'un paramètre d'ordre complexe :

$$\phi(\vec{r}) = V(\vec{r}) e^{i\chi(\vec{r})} \quad V, \chi \text{ réels}$$

Où $|V|^2$ représente une densité et $\chi(\vec{r})$ décrit la circulation. L'impulsion des molécules est décrite par :

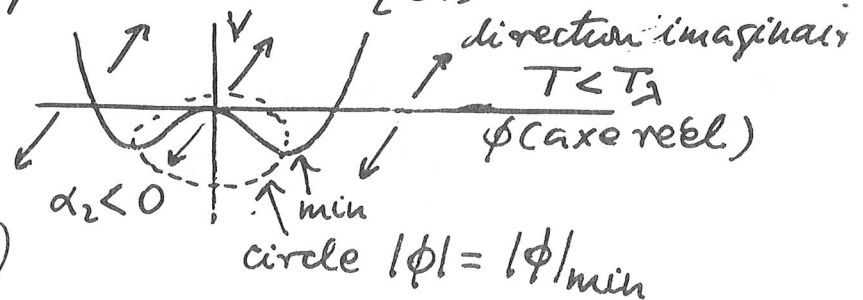
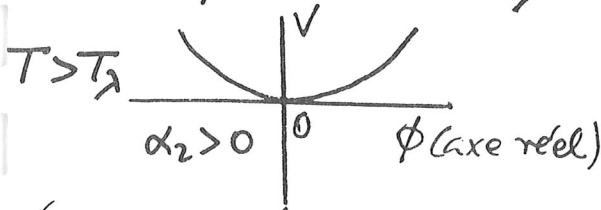
$$\vec{p}_s = \hbar \vec{\nabla} \chi(\vec{r})$$

V , potentiel, indépendant de χ ! Symétrie $U(1)$

L'énergie libre s'écrit :

$$A = \frac{1}{2m} |-i\hbar \vec{\nabla} \phi(\vec{r})|^2 + \alpha_2(T) |\phi(\vec{r})|^2 + \alpha_4(T) |\phi(\vec{r})|^4$$

avec, à nouveau, le point λ à $\alpha_2(T) = 0$



(Valable pour $T \rightarrow T_\lambda$)

On trouve le minimum à : $|\phi|_{\min} = \sqrt{\frac{-\alpha_2}{2\alpha_4}}$, avec une phase χ arbitraire. Cette phase correspond à un degré de liberté sans énergie intrinsèque (sans "masse") : $|\phi|^2 \vec{\nabla} \chi \propto$ courant superfluide.

Par un changement de variables : $\phi = (|\phi|_{\min} + v) e^{i\chi}$
 on trouve : $(v, \chi \text{ réels})$

$$|\vec{\nabla} \phi(\vec{r})|^2 = (|\phi|_{\min} + v)^2 (\vec{\nabla} \chi)^2 + (\vec{\nabla} v)^2$$

Énergie d'un vortex $\propto |\phi|^2 (\int \vec{\nabla} \chi \cdot d\vec{\ell})^2$ "particule" neutre sans masse "particule" neutre avec masse (saut en énergie)

explication des masses : V dépend de v , mais pas de χ !

NOUS AVONS VU LE MECANISME DE GOLDSTONE POUR DES PARTICULES NEUTRES (ATOMES D'HELIUM)...

MAIS QUE SE PASSE-T-IL AVEC DES PARTICULES CHARGÉES ? Superfluide des paires de Cooper

MODELE PHENOMENOLOGIQUE DE GINZBURG-LANDAU POUR LA SUPRACONDUCTIVITE (EN PRESENCE D'UN CHAMP MAGNETIQUE) PRÈS DU POINT CRITIQUE

Energie libre de Gibbs: (densité) Potentiel $V(|\phi|^2)$

$$G_S = G_n + \frac{1}{2m} \left| -i\hbar \vec{\nabla} \phi - \frac{e}{c} \vec{A} \phi \right|^2 + \alpha_2(T) |\phi|^2 + \alpha_4 |\phi|^4$$

↑
energie libre de l'état normal

$+ \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0} - \vec{B} \cdot \vec{H}$

energie du champ électromagnétique

[De nos jours, on appelle l'opérateur:

$$\vec{D} = \vec{\nabla} - \frac{ie}{\hbar c} \vec{A}$$

dérivation covariante associé à la connexion définie par \vec{A}]

A nouveau, avec $\alpha_2 < 0$, l'état fondamental se trouve à: $|\phi|_{min} = \sqrt{-\alpha_2 / 2\alpha_4}$

Mais, cette fois-ci on peut redéfinir: $\vec{A} \rightarrow \vec{A}'$
 $\vec{A}' = \vec{A} + \frac{c\hbar}{e} \vec{\nabla} \chi$ $\chi = \text{phase de } \phi$

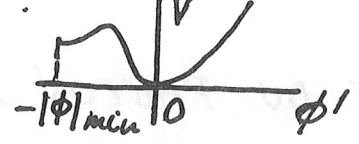
et on trouve:

$$\left| -i\hbar \vec{\nabla} \phi - \frac{e}{c} \vec{A} \phi \right|^2 = \left| -i\hbar \vec{\nabla} |\phi| - \frac{e}{c} \vec{A}' |\phi| \right|^2 =$$

$$= \hbar^2 (\vec{\nabla} |\phi|)^2 + \frac{e^2}{c^2} \vec{A}'^2 |\phi|^2 \rightarrow \text{Définir } \phi' = |\phi| - |\phi|_{min}$$

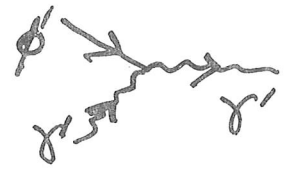
Imaginaire réel

D'où :



"masse du photon"

$$G_S = G_N + \frac{1}{2m} [(\hbar \nabla \phi')^2 + \frac{e^2}{c^2} \vec{A}'^2 |\phi_{min}|^2 + 2 \frac{e^2}{c^2} |\phi|_{min} \phi' \vec{A}'^2 + \frac{e^2}{c^2} \phi'^2 \vec{A}'^2] + V(\phi') + \frac{B^2}{2\mu_0} - \vec{B} \cdot \vec{H}$$



Potentiel

Energie du champ électromagnétique

Remarques :

- ϕ' représente les fluctuations de la densité de paires de Cooper (elles peuvent se transformer en des photons!)

- Le photon acquiert un mode de polarisation longitudinal et une masse par le mélange

$\vec{A} \cdot \nabla \chi \rightarrow$ avec le gradient de la phase de ϕ (supercourant)

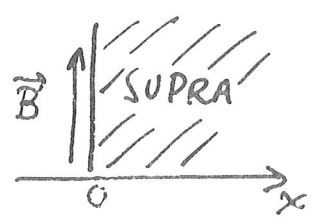
$$(\vec{J}_S = -\frac{e\hbar}{2m} |\phi|^2 \vec{A}')$$

On d'autres termes, le champ électromagnétique se mélange avec le degré de liberté de la circulation (donc, du courant) des paires de Cooper. Il s'agit de fluctuations à densité constante ($|\phi| = \text{constante}$). $\vec{J}_S = -\frac{e\hbar}{2m} |\phi|^2 (\nabla \chi + \frac{e}{\hbar c} \vec{A}')$

- Du coup, l'équation $\text{div } \vec{A} = 0$ n'est plus satisfaite, car en général $\Delta A \neq 0$. D'où la présence d'un degré de liberté longitudinal. Mais \vec{B} reste inchangé.

- Relation masse du photon - effet Meissner. Si le photon a une masse μ , on aura :

$$\Delta \vec{B} \approx \frac{\mu^2}{\hbar^2 c^2} \vec{B}$$



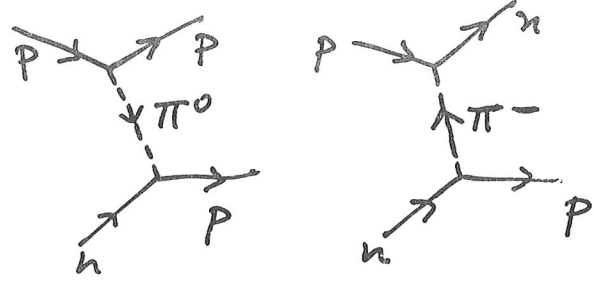
$$\frac{d^2 B}{dx^2} = \frac{\mu^2}{\hbar^2 c^2} B \Rightarrow B = B_0 e^{-x/\lambda}$$

$$\lambda = \frac{\hbar c}{\mu} = \text{longueur de London}$$

(négligeant interactions)

⇒ LA QUESTION DE LA MASSE DU PHOTON DANS UN SUPRACONDUCTEUR

Déjà Yukawa (1935) avait postulé l'échange d'une particule avec masse (le meson) pour rendre compte des forces nucléaires



Potentiel de portée finie:
 $V(\vec{r}) \propto \frac{1}{r} e^{-\frac{\mu}{\hbar c} r}$
 très similaire à l'effet

Messner : le facteur $1/r$ vient des 3 dimensions d'espace
 Longueur de propagation \leftrightarrow Longueur de London
 (même expression $\frac{\hbar c}{\mu}$ dans les deux cas!)

Au sein du supraconducteur, avec une longueur de pénétration $\sim 1000 \text{ \AA}$, le photon acquiert une masse $\sim 1 \text{ eV}$ (équivalente à l'effet du supercourant)

PION: $m \sim 100 \text{ MeV}$ $\lambda \sim 10^{-13} \text{ cm}$

W, Z^0 : $m \sim 100 \text{ GeV}$ $\lambda \sim 10^{-16} \text{ cm}$

photon dans supra: $m \sim 1 \text{ eV}$ $\lambda \sim 10^{-5} \text{ cm}$

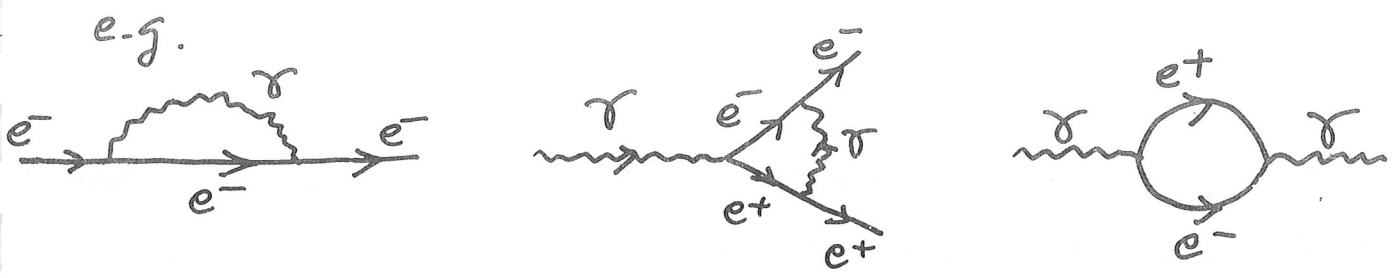
photon dans le vide: $m \lesssim 10^{-34} \text{ MeV}$, $\lambda \gtrsim 10^2 \text{ cm}$

ON REMARQUERA QUE LA BRISURE SPONTANEE EST LE SEUL MOYEN DE RENDRE COMPATIBLE UNE MASSE DU PHOTON AVEC L'INVARIANCE DE JAUGE:

Un terme $m^2 \vec{A}^2$ rajouté brutalement au lagrangien briserait cette invariance \Rightarrow en réalité, l'invariance de jauge protège l'absence de masse du photon

POURQUOI UNE THEORIE DE JAUGE ?

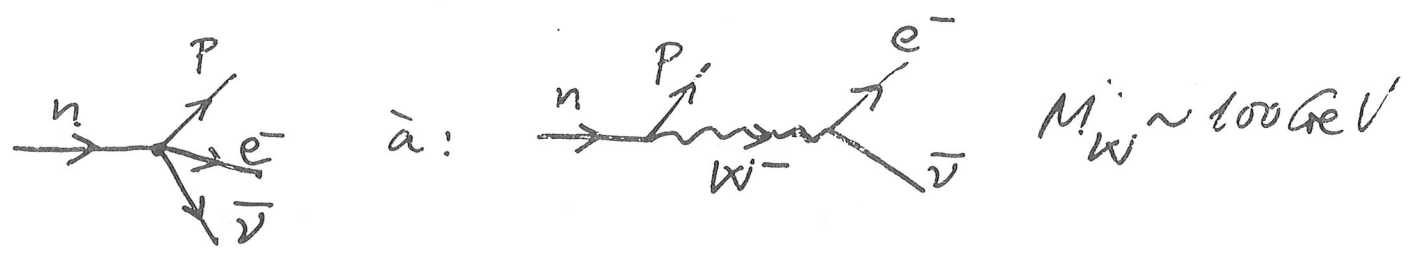
LA THEORIE QUANTIQUE DES CHAMPS EST PLEINE D'INFINIS ASSOCIES A LA DIVERGENCE D'INTEGRALES QUI DECRIVENT LES GRAPHES DE FEYNMANN, NOTAMMENT LES "DIVERGENCES ULTRAVIOLETTES"



L'INVARIANCE DE JAUGE JOUE UN ROLE CRUCIAL DANS L'ELIMINATION DES "INFINIS" DE L'ELECTRODYNAMIQUE QUANTIQUE (RENORMALISATION)

DE MEME, LES THEORIES DE JAUGE ONT FOURNI LE SEUL MOYEN DE CONSTRUIRE UNE THEORIE RENORMALISABLE DES INTERACTIONS FAIBLES (DESINTEGRATION β)

On est d'abord passé de :



MAIS, À CAUSE DE LA MASSE DU W , IL RESTAIT LE PROBLEME DE LA COMPATIBILITE DE CETTE MASSE AVEC LA RENORMALISABILITE DE LA THEORIE (divergences associées au mode longitudinal)

SOLUTION :

THEORIE DE JAUGE BRISE SPONTANEMENT

SCHEMA GENERAL DES THEORIES DE JAUGE

- ON A UN OU PLUSIEURS CHAMPS DE MATIERE (SCALAIRES OU SPINORIELS) AVEC UN ESPACE DE DEGRES DE LIBERTE "INTERNE" DONT LE GROUPE DES TRANSFORMATION EST (normalement, compact) PARAMETRISÉ PAR n COORDONNÉES RÉELLES (normalement, variant entre 0 et π ou entre 0 et 2π) e.g. les coordonnées polaires sur la surface d'une sphère. EXTENSIONS TYPIQUES : SURFACE SPHERIQUE DANS UN ESPACE À n DIMENSIONS RÉELLES OU COMPLEXES.
- POUR CHAQUE COORDONNÉE DE PHASE "INTERNE", ON DÉFINI UNE CONNEXION AVEC UN CHAMP DE VECTEURS A_μ^i ($i=1, \dots, n$)
- ON GÉNÉRALISE LA DERIVATION COVARIANTE $D_\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} + i \frac{e}{\hbar c} A_\mu$ A LA GEOMETRIE PARTICULIERE DE L'ESPACE DES DEGRES DE LIBERTE "INTERNE".
- ON GÉNÉRALISE DE LA MÊME FAÇON LE TERME CINÉTIQUE $(\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x_\mu} - i \frac{e}{\hbar c} A_\mu \bar{\phi})(\frac{\partial \phi}{\partial x_\mu} + i \frac{e}{\hbar c} A_\mu \phi)$ AINSI QUE L'ÉNERGIE DU CHAMP DE JAUGE $\frac{1}{2} \sum_{\mu, \nu} |F_{\mu\nu}|^2 = \vec{E}^2 + \vec{B}^2$
- ON BRISE, LE CAS ÉCHEANT, UNE PARTIE DE LA SYMÉTRIE DE FAÇON SPONTANÉE EN PRENANT QUELQUES CHAMPS QUI SE CONDENSENT DANS LE VIDE. POUR CHAQUE COORDONNÉE "INTERNE" PAR RAPPORT À LAQUELLE LA SYMÉTRIE A ÉTÉ BRISÉE PAR LA CONDENSATION DES CHAMPS, ON A UN PHÉNOMÈNE DE SUPRACONDUCTIVITÉ : LA PROPAGATION DES BOSONS DE JAUGE ASSOCIÉS AUX COORDONNÉES DE SYMÉTRIE BRISÉE EST ALORS AMORTIE PAR DES SUPERCOURANTS QUI SE FORMENT DANS LE VIDE.

MODELE DE GLASHOW-SALAM-WEINBERG (Interactions électro-faibles)

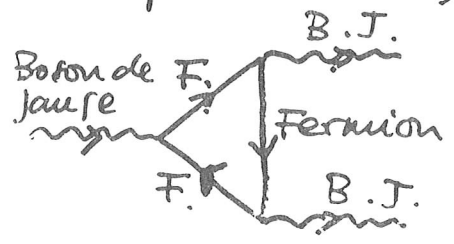
- DYNAMIQUE : MODELE DE GINZBURG-LANDAU AVEC PLUS DE DEGREES DE LIBERTE

Mécanique Statistique \longleftrightarrow Formalisme Lagrangien
 3 dimensions d'espace \longleftrightarrow 4 dimensions d'espace-temps
 $U(1)$ phase, 1 coordonnée "interne" \longleftrightarrow $SU(2)_L \otimes U(1)$, 4 coord.
 Connexion : 1 quadrivecteur $A_\mu(x)$ \longleftrightarrow 4 champs de vecteurs
 1 boson de jauge \longleftrightarrow 4 bosons de jauge : γ, Z^0, W^\pm
 Paires de Cooper \longleftrightarrow Bosons de Higgs (4 particules)
 Brisures spontanées \longleftrightarrow Brisures spontanées $\xrightarrow{\text{reste}} U(1)_{e.m.}$
 Condensation des paires de Cooper \longleftrightarrow Condensation d'un Higgs
 Supercourant "avalé" par γ \longleftrightarrow 3 supercourants avalés
 Masse du γ \longleftrightarrow Masses des Z^0, W^+, W^-
 (le photon reste sans masse)
 Rien \longleftrightarrow Fermions : quarks, leptons
 (e, ν, \dots)

• SCHEMA DES GENERATIONS (q = charge électrique)

- $\mu m^{1/2}$ • e^+ $q = +1$
- " • • • quark u, $q = 2/3$
- " • • • antiquark \bar{d} , $q = 1/3$
- " • • ν et $\bar{\nu}$, $q = 0$
- " • • • quark d, $q = -1/3$
- " • • • antiquark \bar{u} , $q = -2/3$
- " • e^- $q = -1$

μ^+ τ^+
 \vdots \vdots
 X N fois
 (3 d'après le LEP)



Raison: SCHEMA NECESSAIRE POUR EVITER LES DIVERGENCES DU DIAGRAMME TRIANGULAIRE (Anomalies d'Adler-Bell-Jackiw)

SITUATION DES INTERACTIONS ELECTROFAIBLES: (36)

LE MODÈLE DE GSW S'ACCORDE TRÈS BIEN AVEC L'EXPERIENCE :

- Les bosons intermédiaires W^\pm et Z^0 ont été découverts au CERN auprès du collisionneur $p\bar{p}$ (expériences UA1 et UA2) $M_{Z^0} = 92 \text{ GeV}$, $M_{W^\pm} = 81 \text{ GeV}$
- Le schéma des générations semble se réaliser dans la nature (3 générations, d'après la mesure au LEP de la largeur de désintégration de la raie du Z^0).

Mais :

- On n'a pas encore trouvé le boson de Higgs qui reste après la brisure de la symétrie (1 particule neutre)
- Il manque un quark (dit "top") pour compléter le schéma des générations $g_{\text{top}} = 2/3$

LE HIGGS ET LE QUARK "TOP" CONSTITUENT LE SUJET CENTRAL DES FUTURS PROGRAMMES SUR ACCELERATEUR \Rightarrow L'OBJECTIF ETANT DE PARACHEVER LA VERIFICATION DU MODELE "STANDARD" DE GSW

Remarque: AVEC L'EFFET CASIMIR, LA DECOUVERTE EXPERIMENTALE DU W^\pm ET DU Z^0 FOURNIT LA DEUXIEME PREUVE DIRECTE DE L'EXISTENCE D'UNE STRUCTURE MATERIELLE DANS LE VIDE

HADRONS, QUARKS ET INTERACTIONS "FORTES"

LES INTERACTIONS "FORTES" SONT A L'ORIGINE DES FORCES NUCLEAIRES, RESPONSABLES DE L'EXISTENCE DES NOYAUX ATOMIQUES. A DIFFERENCE DES INTERACTIONS ELECTROMAGNETIQUES, ELLES SONT A COURTE PORTEE MAIS "PLUS FORTES"

$$V(r) \propto \frac{1}{r} e^{-\mu/\hbar c r} \quad \mu > 0 \Rightarrow \int d^3\vec{r} V(r) \text{ finie}$$

Si $\mu = 0$ (e.g. électromagnétisme), $V(r) \propto \frac{1}{r} \Rightarrow$
 \Rightarrow force à longue portée

DANS UN PREMIER TEMPS, ON A PENSE A UNE DES PROTONS ET NEUTRONS INTERAGISSANT PAR L'ECHANGE DE MEJONS π (π^\pm, π^0). LE PROTON ET NEUTRON ETAIENT CONSIDERES COMME DEUX ETATS DE LA MEME PARTICULE, DANS UN ESPACE DE COORDONNEES INTERNES: L'ISOSPIN

$$\psi_{\text{nucleon}} = \begin{pmatrix} \psi_{\text{proton}} \\ \psi_{\text{neutron}} \end{pmatrix} \quad \text{espace "interne" de 2 dimensions complexes}$$

Groupe de symétrie : matrices complexes 2×2 unitaires et $\det = 1 \Rightarrow$ 3 coordonnées réelles
Groupe $SU(2)$, espace des spineurs Heisenberg

- MAIS : a) on ne croyait pas à la consistance d'une théorie des champs basée sur ce modèle
- b) on a bientôt découvert l'existence de plusieurs autres particules, qui ont fait de ce schéma un modèle de 'passé'

LA PHYSIQUE DES PARTICULES SUR ACCELERATEUR A MIS EN EVIDENCE UNE VASTE FAMILLE DE PARTICULES INTERAGISSANT DE FAÇON ANALOGUE AUX PROTONS, NEUTRONS ET PIONS : ON APPELE CES PARTICULES LES HADRONS (seul le proton est stable)

HADRONS $\left\{ \begin{array}{l} \text{BARYONS (Analogues aux } p, n \dots) \\ \text{MESONS (Analogues aux } \pi^{\pm}, \pi^0 \dots) \end{array} \right.$

POUR EXPLIQUER CETTE PROLIFERATION DES HADRONS, Gell-Mann et Zweig ONT PROPOSE EN 1964 LE MODELE DES QUARKS, COMPLETE ENSUITE PAR D'AUTRES AUTEURS :

- LES QUARKS SONT DES PARTICULES DE SPIN $1/2$ ET CHARGE FRACTIONNAIRE ($+\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}$ pour les quarks ; $-\frac{2}{3}, +\frac{1}{3}$ pour les antiquarks)
- ILS APPARAISSENT PAR DOUBLETS D'ISOSPIN, UN PAR GENERATION :

$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} s \\ c \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}$ Mais, le t ??

- CHAQUE QUARK A TROIS ETATS POSSIBLES D'UN DEGRE DE LIBERTE INTERNE DIT "COULEUR" \rightarrow Groupe $SU(3)_c$, 8 coordonnées réelles
 \Rightarrow LES INTERACTIONS FORTES SONT LIEES A UNE CONNEXION AVEC 8 CHAMPS DE VECTEURS
 \Rightarrow 8 BOSONS DE JAUGE : LES "GLUONS"

ON PEUT, À PARTIR DES QUARKS, FORMER LES HADRONS :

BARYONS ($p, n \dots$) \rightarrow États à 3 quarks qqq

(ANTI-)BARYONS (\bar{p}, \bar{n}, \dots) \rightarrow États à 3 antiquarks $\bar{q}\bar{q}\bar{q}$

MEZONS (π^{\pm}, π^0, \dots) \rightarrow États quark-antiquark $q\bar{q}$

(Peut-être) BOULET DE GLUE \rightarrow États à plusieurs gluons $gg, ggg \dots$

\rightarrow ON NE TROUVE PAS D'ÉTATS $qq, \bar{q}\bar{q}, q\bar{q}\bar{q} \dots$

\rightarrow ON N'A JAMAIS OBSERVE UN QUARK LIBRE

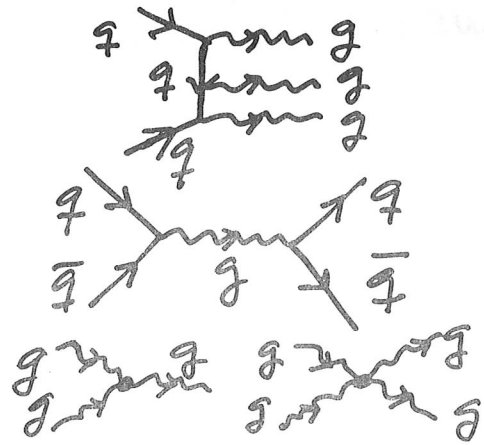
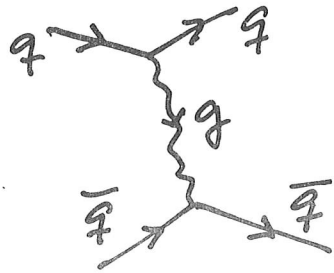
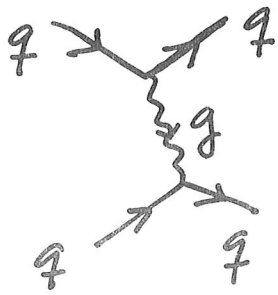
\rightarrow ON N'A JAMAIS OBSERVE UN GLUON

EXPLICATION THEORIQUE : SEUL LES ÉTATS QUI SONT DES "SINGULETS" DE COULEUR (DONC, INVARIANTS PAR RAPPORT A DES TRANSFORMATIONS DE $SU(3)_C$ DANS L'ESPACE "INTERNE") SE RÉALISENT DANS LA NATURE. TOUS LES HADRONS CONNUS PEUVENT EN EFFET ÊTRE DÉCRITS PAR DES "SINGULETS" DE COULEUR

MAIS, QUEL MÉCANISME DYNAMIQUE POURRAIT PRODUIRE UN TEL EFFET ?

EN RÉALITÉ, ON NE SAIT PAS CALCULER LES INTERACTIONS FORTES : ELLES SERAIEN DÉCRITES PAR UN LAGRANGIEN ANALOGUE À L'ÉLECTRODYNAMIQUE, MAIS AVEC LES GLUONS À LA PLACE DE PHOTON : CHROMODYNAMIQUE QUANTIQUE, MAIS DIFFICILE À TRAITER!

INTERACTIONS FONDAMENTALES DE LA CHROMODYNAMIQUE QUANTIQUE : QCD



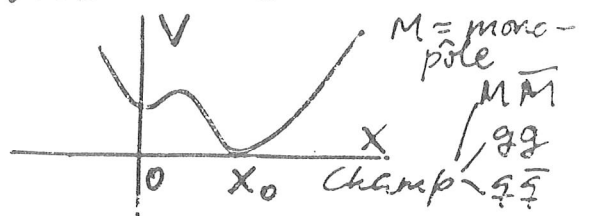
MAIS, L'INTERACTION FORTE A COURTE DISTANCE NE PEUT PAS ETRE DECRITE PAR UN PETIT NOMBRE DE GRAPHES DE FEYNMANN
⇒ IL FAUDRAIT SOMMER SUR UN NOMBRE INFINI D'ENTRE EUX : QCD "non-perturbatif"

ON SOUPÇONNE L'EXISTENCE D'UNE TRANSITION DE PHASE → PHASE DU "CONFINEMENT"

→ IMPLICITEMENT, NOUS NOUS SOMMES PLACES DANS LE "VIDE PERTURBATIF", C'EST A DIRE : LE MINIMUM LOCAL DE L'ENERGIE POTENTIELLE PAR RAPPORT AUQUEL ON ECRIT LE LAGRANGIEN DE QCD SELON LA RECETTE HABITUELLE (lagrangien de l'électrodynamique, mais : électron → quarks, $U(1) \rightarrow SU(3)_c$, photon → gluons)

→ EN REALITE, LORSQU'ON SOMME SUR TOUTS LES PROCESSUS CONTRIBUANT A LA SOLUTION DE LA THEORIE, ON TROUVE UNE INSTABILITE DU VIDE : LE VIDE "PERTURBATIF" DEVIENT INSTABLE ET UN

NOUVEL ETAT FONDAMENTAL S'INSTAURE (gluons et paires $q\bar{q}$ se condensent dans le vide)



NATURELLEMENT, LE SPECTRE DES EXCITATIONS (48)
AUTOUR DU NOUVEAU VIDE N'EST PLUS LE MEME QUE
CELUI AUTOUR DU VIDE "PERTURBATIF"

TRANSITION DE PHASE

VIDE "PERTURBATIF" \longrightarrow VIDE "REEL"

EXCITATIONS: q, \bar{q}, g \longrightarrow EXCITATIONS: HADRONS

COULEUR LIBRE \longrightarrow "CONFINEMENT" DE LA

On a des $q, \bar{q}, g \dots$ libres COULEUR: pas de $q, g \dots$ lib.

QUE SONT LES HADRONS ?

- LE NOUVEAU VIDE, AVEC LE CONDENSE DE PAIRES $q\bar{q}$, gluons, monopoles, ... EST UN SUPRACONDUCTEUR QUI EJECTE LE CHAMP DE COULEUR PAR UN NOUVEAU TYPE D'EFFET MEISSNER.

- LES EXCITATIONS DE CE VIDE RESEMBLENT AUX VORTEX, MAIS IL S'AGIT DE DEFATS PONCTUELS ET NON DE FILAMENTS: LES HADRONS SONT DES BULLES "NORMALES" A L'INTERIEUR DU VIDE SUPRACONDUCTEUR.

DE CEFAIT, ON A :

- A L'INTERIEUR DES HADRONS, LE VIDE PERTURBATIF AVEC DES QUARKS ET DES GLUONS

- A L'EXTERIEUR DES HADRONS, LE VIDE REEL "SUPRACONDUCTEUR" OU LA COULEUR EST "INTERDITE" ET LES QUARKS ET GLUONS NE PEUVENT PAS EXISTER EN TANT QUE PARTICULES LIBRES

BILAN :

(42)

- DANS L'ETAT ACTUEL DE NOTRE COMPREHENSION DE LA PHYSIQUE DES PARTICULES, TOUTE LA DYNAMIQUE TOURNE AUTOUR DE LA STRUCTURE MATERIELLE DU VIDE.

NOUS SAVONS QUE LE VIDE EST UN MILIEU MATERIEL, QUI SE MANIFESTE PAR RAPPORT À TOUS LES PHÉNOMÈNES PHYSIQUES

Electrodynamique → EFFET CASIMIR
Interactions faibles → MASSES DES W^{\pm} , Z^0
Interactions fortes → CONFINEMENT DES QUARKS ?

- LES INTERACTIONS FAIBLES ET ELECTROMAGNETIQUES SONT EN REALITE UNE SEULE INTERACTION, UNIFIEE PAR LE "MODELE STANDARD" DE GLASHOW-SALAM-WEINBERG (Théorie de Jauge $SU(2)_L \otimes U(1)$)
- D'APRES CETTE APPROCHE, TOUTES LES FORCES OBSERVEES DANS LA NATURE SERAIENT DUES A LA CONNEXION GEOMETRIQUE ENTRE L'ESPACE-TEMPS QUE NOUS CONNAISSONS ET DES ESPACES DECRIVANT LES DEGRES DE LIBERTE "INTERNES" DES PARTICULES → 1 Boson de jauge par coordonnée "interne", champ de vecteurs, force ↔ courbure
- MAIS QUEL EST LE RAPPORT ENTRE LA GEOMETRIE "VUE" PAR NOUS ET LES PROPRIETES DE LA MATIERE A L'INTERIEUR DU VIDE ?

MEMENTO

1 - Interaction particule matière

2 - Cosmologie

3 - Radioactivité

1 - INTERACTION PARTICULE - MATIERE

- Tableau donnant les différents processus physique d'interaction d'un photon ($h\nu$) avec la matière.

- Graphiques

- permettant d'évaluer les importances relatives des processus
- permettant d'extraire le libre parcours moyen d'un photon dans différents milieux

libre parcours moyen

μ_0^{-1} en cm

distance parcourue avant la première interaction

$$\text{ou } d_{1/2} = \frac{\ln 2}{\mu}$$

(extrait des tables LEDERER).

2 - COSMOLOGIE

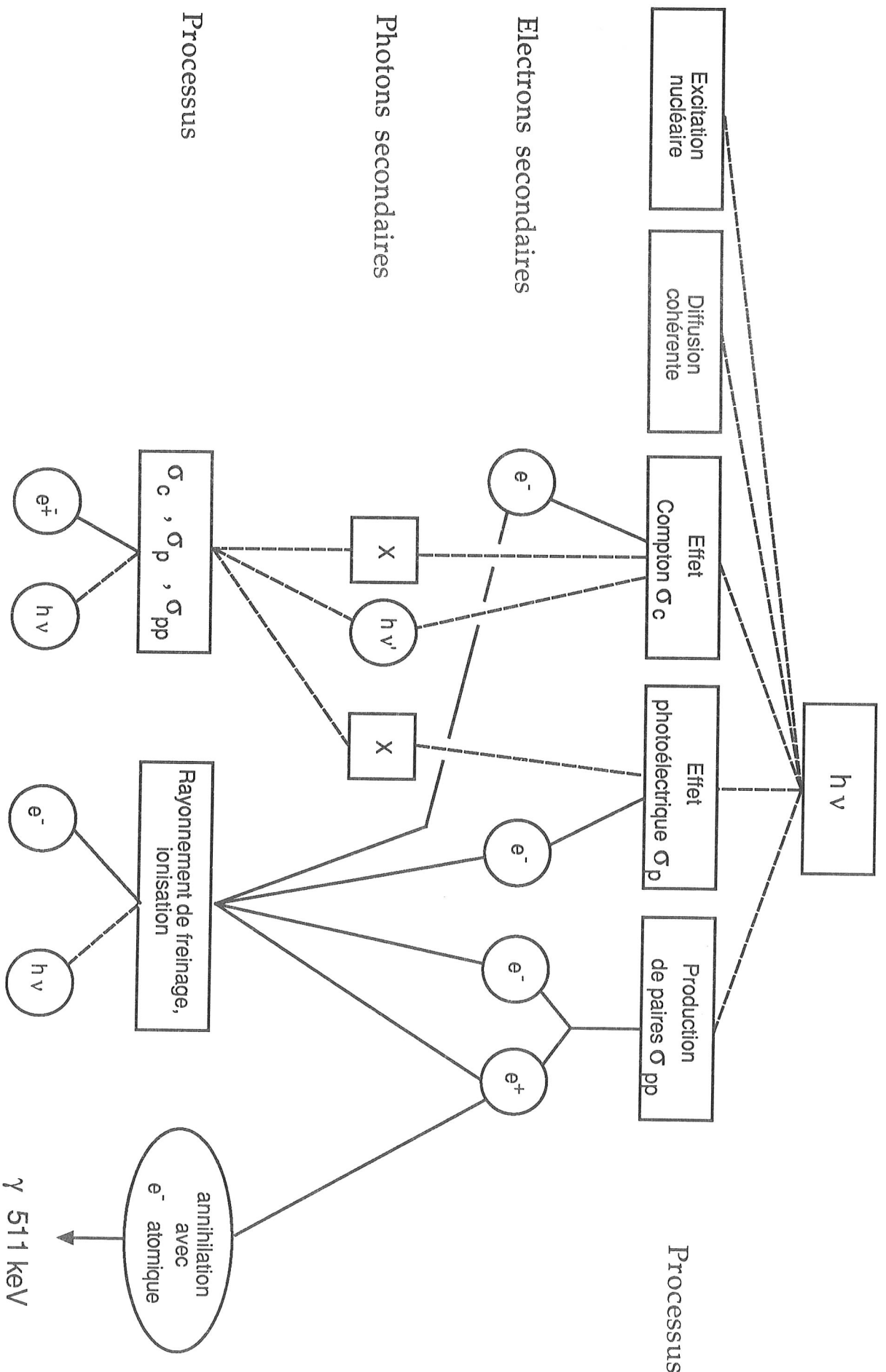
Une page pour définir des quantités importantes et souvent utilisées dans les recherches de matière noire.

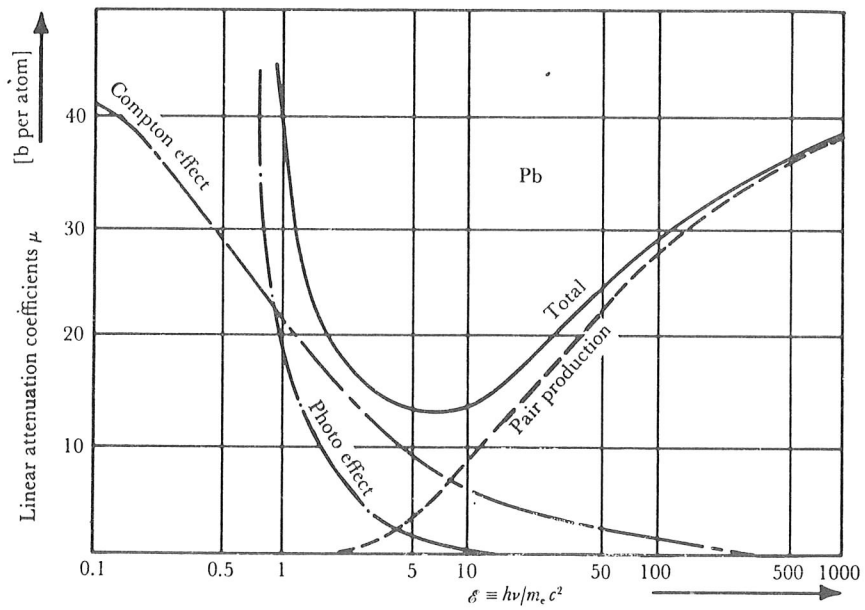
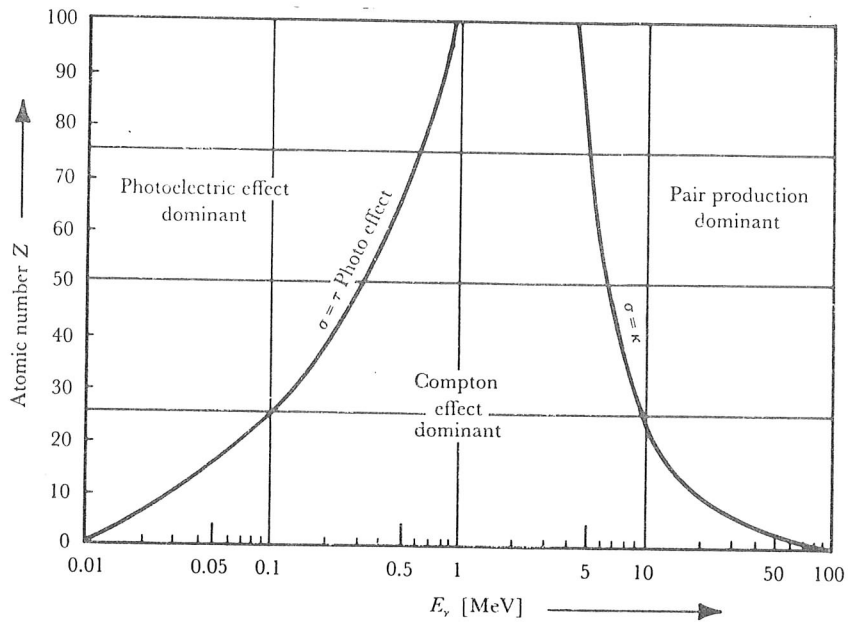
3 - RADIOACTIVITE

Propriétés et abondance des principaux éléments radioactifs à vie longue.



Interaction d'un photon d'énergie donnée avec la matière

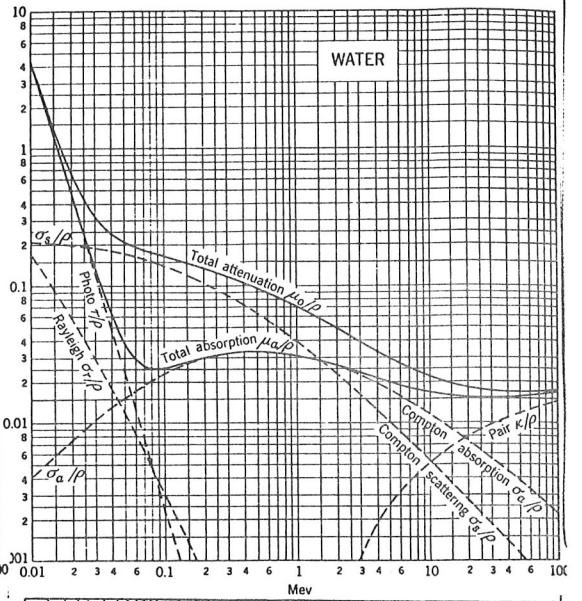
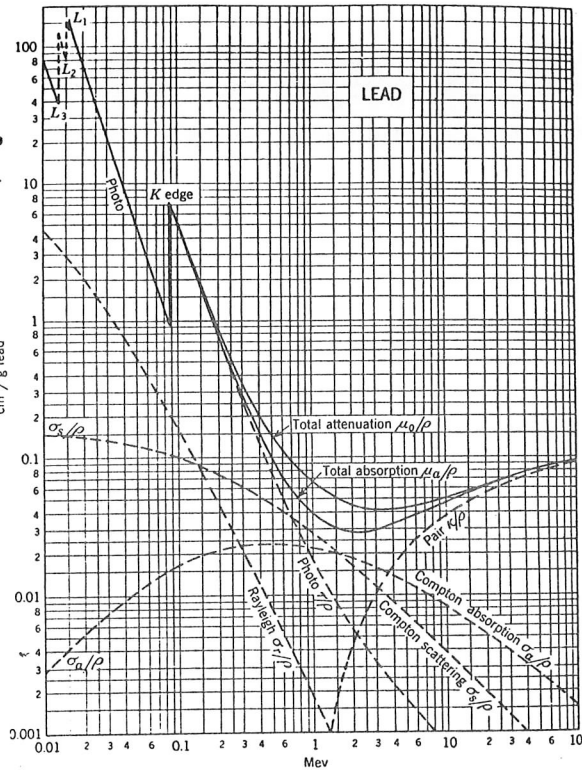




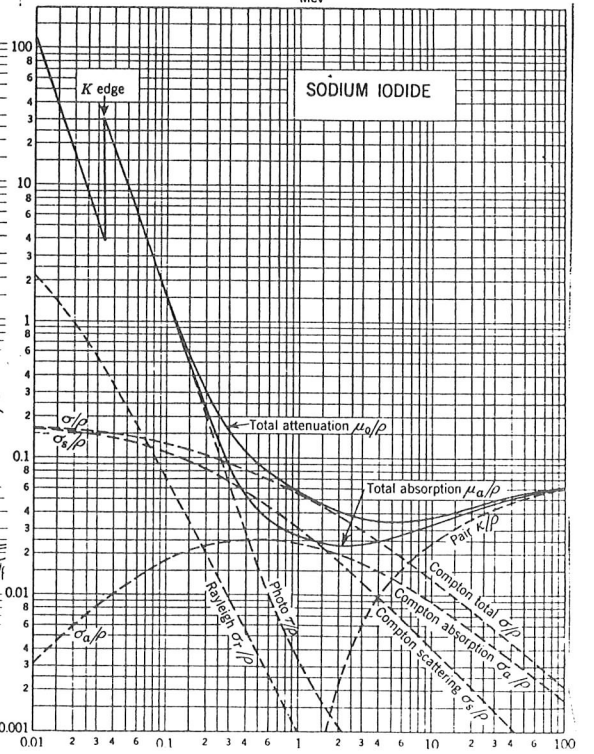
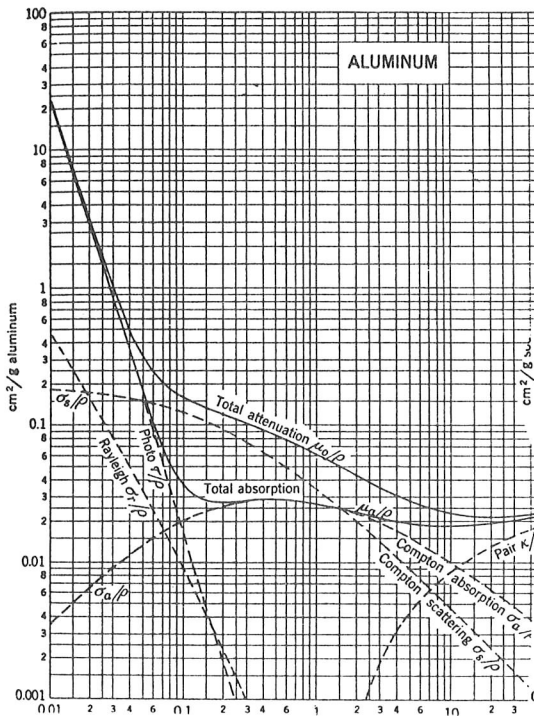
Ref. Physics of Nuclei and Particles
 P. Manman & E. Sheldon. VI.

$\rho_p = 11.35 \text{ g/cm}^3$

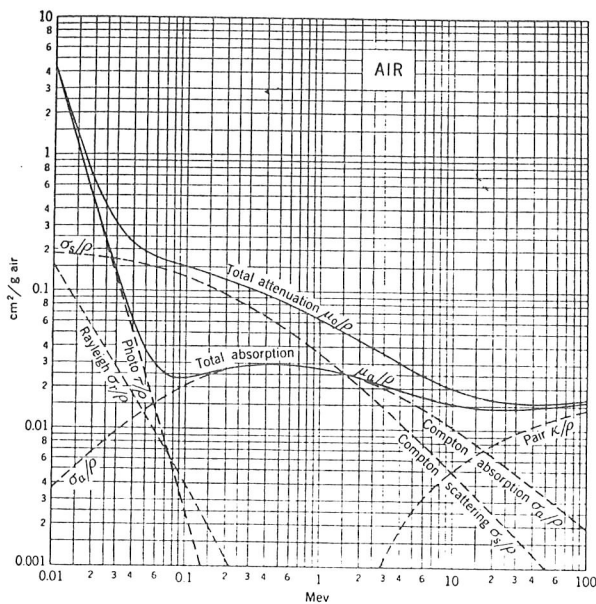
μ/ρ
 μ = coefficient
 d'atténuation
 $[\text{cm}^{-1}]$



$\rho_{Al} = 2.7 \text{ g/cm}^3$



$\rho_{air} = 1.310 \text{ g/cm}^3$
 $20^\circ \text{C}, 1 \text{ atm.}$



$\rho_{NaI} = 3.7 \text{ g/cm}^3$

Fig. 1b. Absorption of photons in beryllium, water, aluminum, and lead (1 keV to 5 MeV)

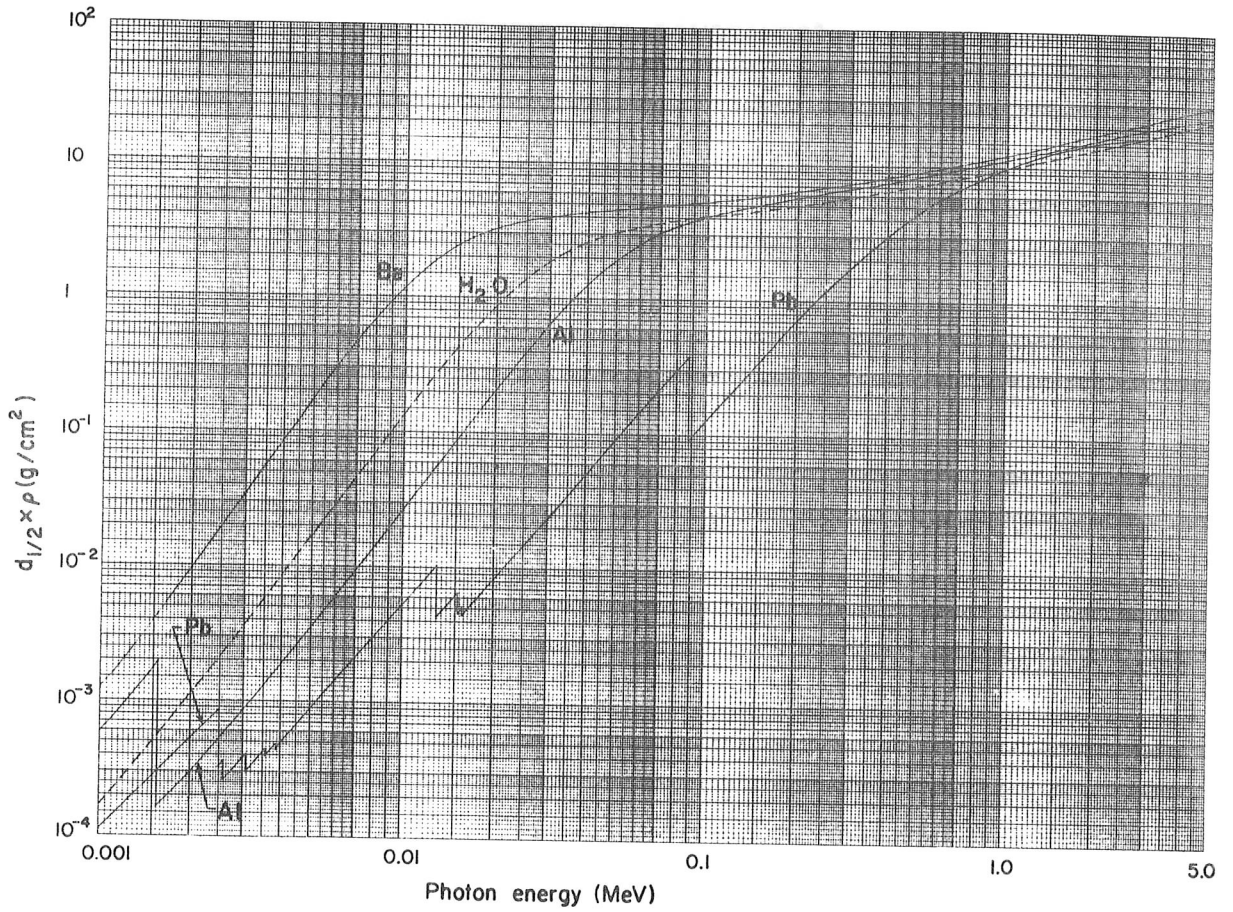
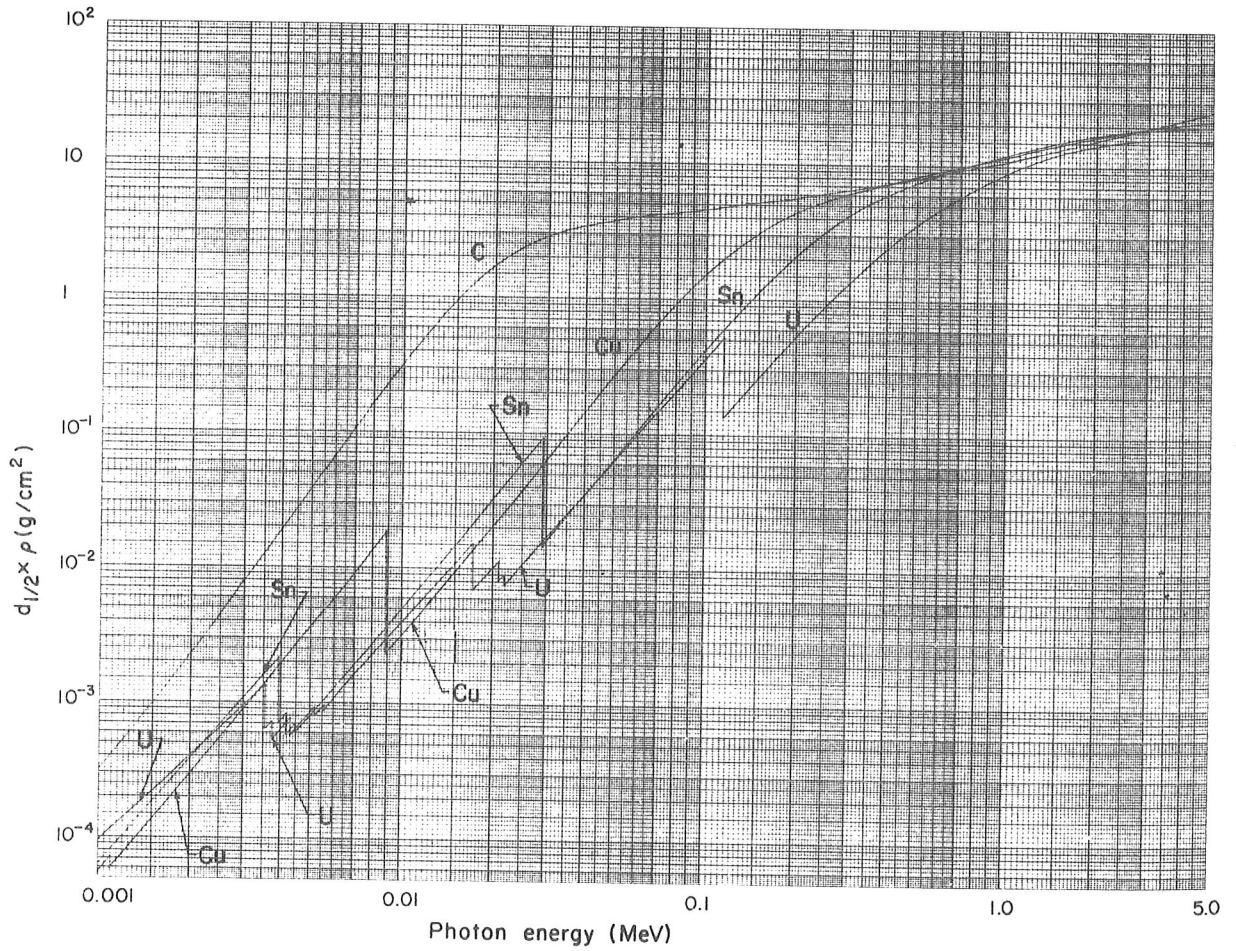


Fig. 1c. Absorption of photons in carbon, copper, tin, and uranium (1 keV to 5 MeV)



Tables of Isotopes 7th edition LEIDERER.

	U 238 SERIES				Th 232 SERIES				U 235 SERIES				
Np													
U	U-238 4.49×10^9 y		U-234 2.48×10^5 y							U-235 7.13×10^8 y			
Pa		Pa-234 1.18 m									Pa-231 3.25×10^4 y		
Th	Th-234 24.1 d		Th-230 7.5×10^4 y			Th-232 1.39×10^{10} y		Th-228 1.90 y		Th-231 25.6 h		Th-227 18.6 d	
Ac							Ac-228 6.13 h				Ac-227 22.0 y		
Ra			Ra-226 1622 y			Ra-228 5.7 y		Ra-224 3.64 d				Ra-223 11.1 d	
Fr													
Rn			Rn-222 3.825 d					Rn-220 54.5 s				Rn-219 3.92 s	
At													
Po		Po-218 3.05 m		Po-214 1.6×10^{-4} s		Po-210 138.4 d		Po-216 0.158 s		Po-212 3.0×10^{-7} s		Po-215 1.83×10^{-3} s	
Bi			Bi-214 19.7 m		Bi-210 5 d			Bi-212 60.5 m				Bi-211 2.16 m	
Pb		Pb-214 26.8 m		Pb-210 21.4 y		Pb-206 STABLE LEAD		Pb-212 10.6 h		Pb-208 35% STABLE LEAD		Pb-211 36.1 m	
Tl			Tl-210 1.3 m		Tl-206 4.19 m			Tl-208 3.1 m				Tl-207 4.79 m	

Figure 1. Uranium-238, uranium-235 and thorium-232 series showing the succession of different chemical elements that are formed during the decay series.

