

**Introduction générale  
aux bruits fondamentaux**

**Hélène BOUCHIAT**

DRTBT 1996 - 01

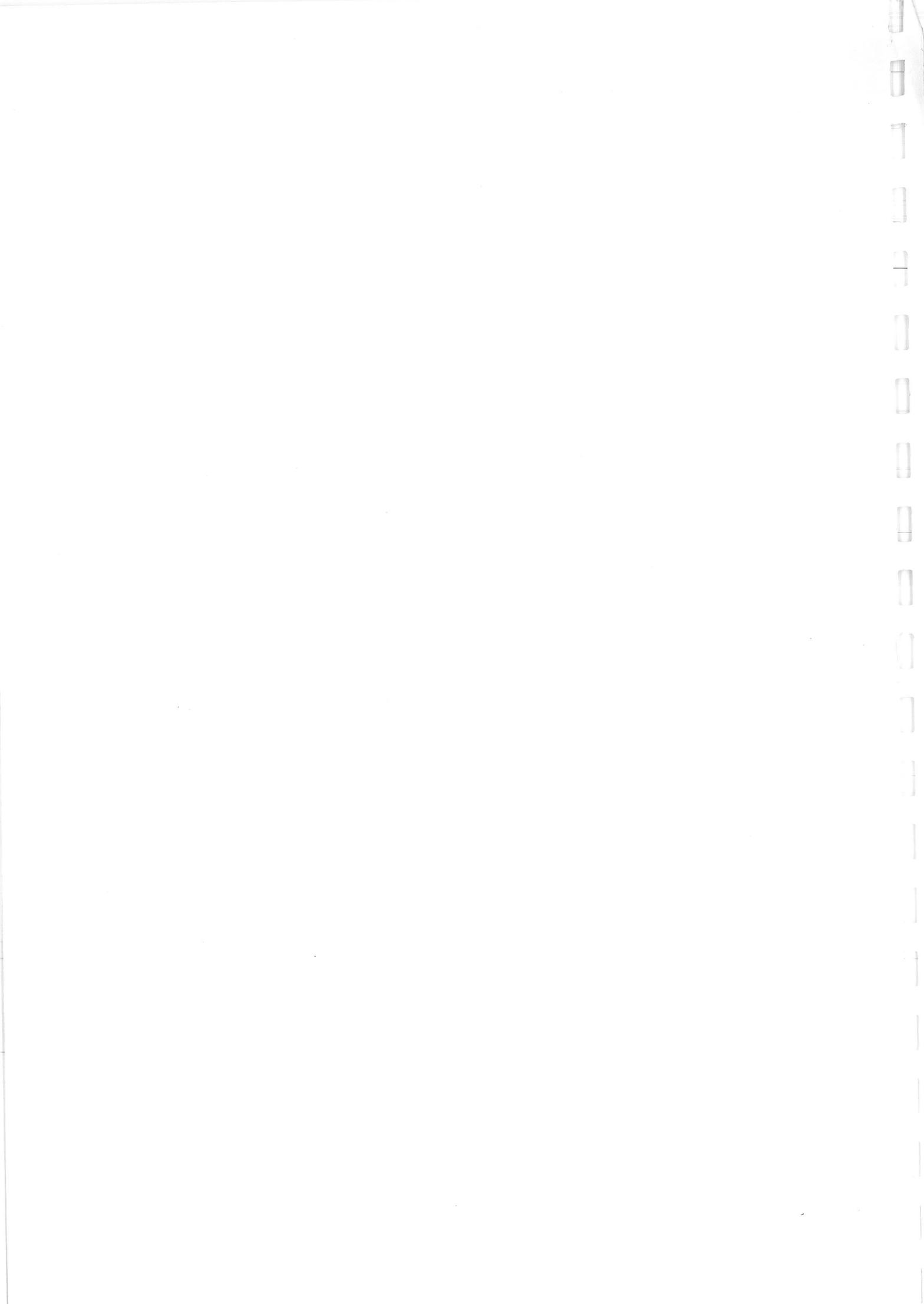
Introduction générale  
aux bruits fondamentaux

Hélène BOUCHIAT

# Exemples d'études des bruits fondamentaux

Hélène Bouchiat

Laboratoire de Physique des Solides, Associé au CNRS,  
Bât. 510, Université Paris-Sud, 91405, Orsay, France.



# 1 Introduction: Pourquoi et comment mesurer le bruit?

Toute grandeur physique présente des fluctuations temporelles (ou bruit) par rapport à sa valeur moyenne. L'objet de ce cours est de montrer que l'analyse de ces fluctuations (dans un système à l'équilibre ou non) peut donner des informations physiques originales. Il est évident que l'étude du bruit d'une grandeur physique, encore plus que toute autre mesure, passe par une minimisation des bruits expérimentaux dont il est important d'avoir compris l'origine pour les maîtriser, en optimisant entre autres le choix du détecteur. Notre exposé se focalisera essentiellement autour des 3 bruits fondamentaux très connus en électronique: bruit Johnson (ou bruit de Nyquist), bruit en  $1/f$  et bruit grenaille[1]. Nous verrons que l'étude expérimentale de ces bruits aux échelles microscopiques a permis d'avancer dans la compréhension de leur origine et s'est révélée une sonde inégalable pour l'étude d'une variété de phénomènes physiques. Nous avons tenu à présenter aussi des expériences de bruit en dehors de la physique des électrons: bruit d'aimantation, mouvement Brownien. Expérimentalement après échantillonnage à une fréquence rapide devant la fréquence de coupure du détecteur (pour éviter les problèmes de repliement de spectre), on caractérise un bruit stationnaire et Gaussien par sa fonction de corrélation calculée sur des intervalles de temps  $\mathcal{T}$  contenant  $N$  échantillons correspondant à une résolution en fréquence:  $\Delta\omega = 1/\mathcal{T}$

$$\langle M(0)M(t) \rangle = \frac{1}{N} \langle \sum_{t_i < \mathcal{T}} M(t_i)M(t_i + t) \rangle \quad (1)$$

Sa transformée de Fourier n'est autre que le spectre de bruit dans la bande fréquence  $\Delta\omega$ :

$$\langle M^2(\omega) \rangle = \frac{1}{\mathcal{T}} \langle | \sum_{t_i < \mathcal{T}} M(t_i) \exp(i\omega t_i) |^2 \rangle \quad (2)$$

Toutefois nous verrons des exemples de bruit, non stationnaire ou non Gaussien pour lequel ce type d'analyse rudimentaire n'a plus de sens.

## 2 Fluctuations thermiques d'un système physique macroscopique : Théorème fluctuation-dissipation (FDT)

### 2.1 Démonstration générale: limites classiques et quantiques

Soit une quantité thermodynamique extensive décrite par un opérateur quantique,  $M$  (aimantation, densité de courant, polarisation électrique etc...) on peut relier de façon tout à fait universelle le spectre de bruit à l'équilibre de ces fluctuations à la composante dissipative de la réponse de  $M$  à une excitation extérieure du champ conjugué à  $M$ . On caractérise les fluctuations de  $M$  par leur fonction de corrélation temporelle  $\langle M(0)M(t) \rangle - \langle M(0) \rangle^2$  et sa transformée de Fourier  $\langle M^2(\omega) \rangle$ . La réponse  $\Delta M(t)$  à un petit champ extérieur dépendant du temps  $\Delta H(t)$  dans la limite de la réponse linéaire est décrite par la fonction définie par:

$$\Delta M(t) = \int_{-\infty}^t \chi(t-t') \Delta H(t') dt' \quad (3)$$

où pour des raisons de causalité  $\chi(\tau)$  n'est défini que pour  $\tau$  positif. La transformées de Fourier de  $\chi$  donne les réponses en phase (non-dissipative) et en quadrature (dissipative) à une excitation harmonique:

$$\chi(\omega) = \chi' + i\chi''(\omega) = \int_0^t \exp(i\omega t) \chi(t) dt \quad (4)$$

Le théorème fluctuation dissipation s'écrit dans la limite  $k_B T \gg \hbar$ :

$$\langle M^2(\omega) \rangle = \frac{2}{\pi} \chi''(\omega) \frac{k_B T}{\hbar \omega} \quad (5)$$

Nous donnons ci dessous une démonstration succincte de ce théorème inspirée de la ref. [2]. On considère un système quantique décrit par son hamiltonien  $\mathcal{H}_0$ , caractérisé par ses états propres  $|n\rangle$  d'énergie  $E_n$  et sa matrice densité  $\rho_{n,m}$ . Lorsque le système est à l'équilibre thermique à la température  $T$ ,  $\rho$  est diagonale et vérifie:

$$\rho_{nm} = \delta_{nm} p_n \text{ avec } p_n = \frac{\exp(-E_n/k_B T)}{Z} \quad (6)$$

$Z$  est la fonction de partition:  $Z = \sum \exp(-E_n/k_B T)$ . L'évolution temporelle de l'opérateur  $M$  est régie par l'équation:  $M_{nm}(t) = \sum_{n,m} M_{nm}(0) \exp(i\omega_{nm} t)$  où  $\omega_{nm} = (E_n - E_m)/\hbar$ . On en déduit  $\langle M(0)M(t) \rangle = \text{tr}(\rho M(0)M(t)) = \sum_{nm} (p_n + p_m) |M_{nm}|^2 \exp(i\omega_{nm} t)$  et le spectre de bruit:

$$\langle M^2(\omega) \rangle = \frac{1}{\pi} \sum_{nm} (p_n + p_m) |M_{nm}|^2 \delta(\omega - \omega_{nm}) \quad (7)$$

De même la fonction de réponse à un petit champ  $\Delta H \exp(i\omega + \eta)t$  (où  $\eta \ll \omega$  décrit le branchement adiabatique du champ) peut être obtenue à partir de l'équation de Liouville qui régit l'évolution temporelle de la matrice densité:

$$-i\hbar \frac{\partial \rho}{\partial t} = [\mathcal{H}(t), \rho] \quad (8)$$

Où  $\mathcal{H}(t) = \mathcal{H}_0 + M \Delta H(t)$  est l'hamiltonien du système perturbé. On en déduit les corrections à la matrice densité à l'ordre 1 en  $\Delta H$ :

$$\Delta \rho_{nm} = (p_n - p_m) \frac{M_{nm}}{(i\omega_{nm} - i\omega + \eta)} \Delta H \exp(i\omega + \eta)t \quad (9)$$

et la réponse du système:  $\Delta M(t) = \text{tr}(\Delta \rho(t)) M = \chi(\omega) \Delta H \exp(i\omega t)$  avec:

$$\begin{aligned} \chi(\omega) &= \sum_{n \neq m} \frac{(p_n - p_m)}{2i} \frac{|M_{nm}|^2}{\hbar(\omega_{nm} - \omega + i\eta)} \\ \chi''(\omega) &= \frac{1}{\hbar} \sum_{n \neq m} (p_n - p_m) |M_{nm}|^2 \delta(\omega_{nm} - \omega) \end{aligned} \quad (10)$$

En comparant avec l'équation 7 et en utilisant la relation:

$$\frac{p_n}{p_m} = \exp\left(-\frac{\hbar \omega_{nm}}{k_B T}\right) \quad (11)$$

On arrive à l'expression quantique du théorème fluctuation dissipation (FDT):

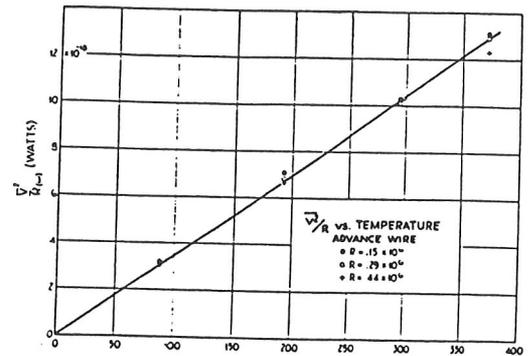
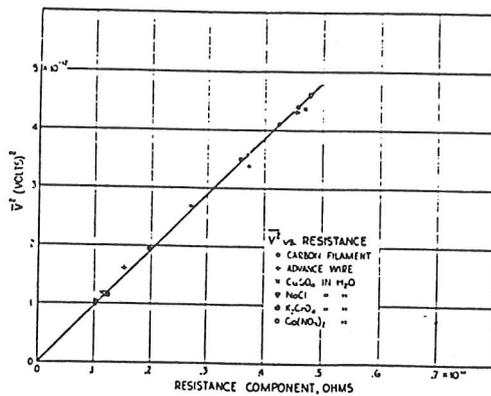


Figure 1: Bruit en tension mesuré sur des matériaux variés entre 77 et 400K par Johnson

$$\hbar \chi''(\omega) = \langle M^2(\omega) \rangle \operatorname{th}\left(\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right) \quad (12)$$

identique à l'expression classique dans la limite  $k_B T \gg \hbar\omega$ . Deux commentaires s'imposent:

- La quantité  $\chi$  étant extensive, proportionnelle au volume  $V$  du système on retrouve que l'amplitude des fluctuations donnée par  $\sqrt{\langle M^2(\omega) \rangle}$  est proportionnelle à  $\sqrt{V}$ .
- Ce calcul n'a un sens que dans un système très grand dont le spectre peut être considéré comme continu, et le résultat ne dépend pas du paramètre  $\eta$  que l'on peut faire tendre vers zero. (Le système peut être considéré comme son propre réservoir.) Ce formalisme ne s'applique pas au cas d'un petit système (atome, molécule, particule brownienne) dont la réponse fait intervenir explicitement son couplage avec un réservoir thermique macroscopique.

## 2.2 Fluctuations thermiques d'une résistance: bruit Johnson ou bruit de Nyquist.

On peut transposer le résultat précédent au cas d'un conducteur métallique de volume  $V = SL$ . Le FDT relie les fluctuations de la densité de courant intégrée sur le volume de l'échantillon:  $J$  à la réponse à une variation de potentiel vecteur  $\Delta \vec{A}(\omega) \exp(i\omega t)$ . La susceptibilité associée  $\chi(\omega)$  s'exprime en fonction de la conductivité  $\sigma(\omega)$ :  $\chi(\omega) = Vi\omega\sigma(\omega)$ . Le TFT prend alors les formes équivalentes, suivant que l'on s'intéresse aux bruits en densité de courant intégrée, en courant à travers la section  $S$ :  $I = J/L$  ou en tension aux bornes du conducteur:

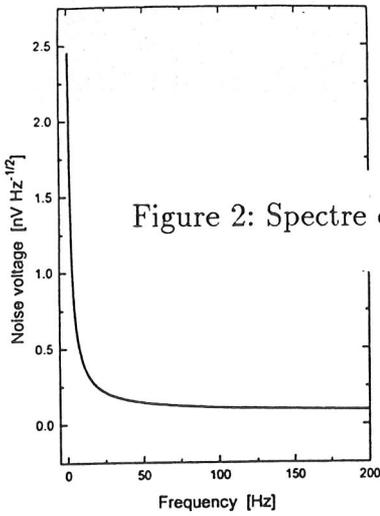
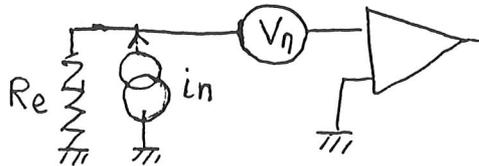


Figure 2: Spectre de bruit en tension du JFET 3600L mesuré à 110K d'après [4]

$$\begin{aligned}
 \langle J^2(\omega) \rangle &= \frac{2\hbar\omega}{\pi} \coth\left(\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right) V\sigma(\omega) \\
 \langle I^2(\omega) \rangle &= \frac{2\hbar\omega}{\pi} \coth\left(\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right) G(\omega) \\
 \langle V^2(\omega) \rangle &= \frac{2\hbar\omega}{\pi} \coth\left(\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right) R(\omega)
 \end{aligned} \tag{13}$$

Où  $R = 1/G = L/\sigma S$  est la résistance de l'échantillon considéré. Dans le domaine de fréquence  $\hbar\omega < k_B T$  le bruit de Nyquist est blanc en fréquence et son intensité est directement proportionnelle à la température et correspond à une amplitude de  $35nV/\sqrt{Hz}$  pour une résistance de  $100K\Omega$  à température ordinaire, facile à détecter avec un amplificateur commercial ordinaire. Ce bruit a été étudié de façon systématique en 1928 par Johnson et Nyquist sur les plans respectivement théorique et expérimental [3].

*Notion de température de bruit d'un amplificateur* De façon générale on définit la température de bruit d'un amplificateur attaqué sur une résistance  $R_e$  comme:  $4k_B T_a = V_a^2(R_e)/R_e$  où  $V_a^2(R_e) = V_n^2 + R_e^2 i_n^2$ ,  $V_n$  et  $i_n$  désignant les bruits en courant et en tension à l'entrée de l'amplificateur.



Pour un amplificateur donné il existe une valeur caractéristique  $R_e = R_{opt}$  pour laquelle la température de bruit est minimale:

$$R_{opt} = V_n/i_n \text{ et } T_a(R_{opt}) = 2V_n^2/R_{opt} \tag{14}$$

(On admet ici, que les bruits sont des bruits blancs.) Nous verrons que dans certains cas cette résistance peut être ajustée en choisissant le point de fonctionnement du transistor.

*Transistors à FET* Pour un bon amplificateur à FET fonctionnant à température ordinaire on a typiquement:  $V_n = 1nV/\sqrt{(Hz)}$ ,  $i_n = 10^{-14}A/\sqrt{(Hz)}$ ,  $R_{opt} = 10^5\Omega$  et  $T_a(R_{opt}) = 0.15K$ . Pour un Fet au silicium refroidit à  $80K$  on peut avoir  $v_n = 0.1nV/\sqrt{(Hz)}$  et  $i_n = 10^{-16}A/\sqrt{(Hz)}$  ce qui correspond pour une résistance de  $1M\Omega$  à une température de bruit de  $0.25mK$ ! [4]

*Amplificateurs à SQUID* Ce sont des détecteurs qui en utilisant l'effet Josephson, permettent de mesurer des variations de flux induites dans une boucle supraconductrice contenant une jonction(SQUID ac) ou deux jonctions (SQUID dc) de l'ordre de  $10^{-4}\Phi_0$  où  $\Phi_0 = h/2e$  est le

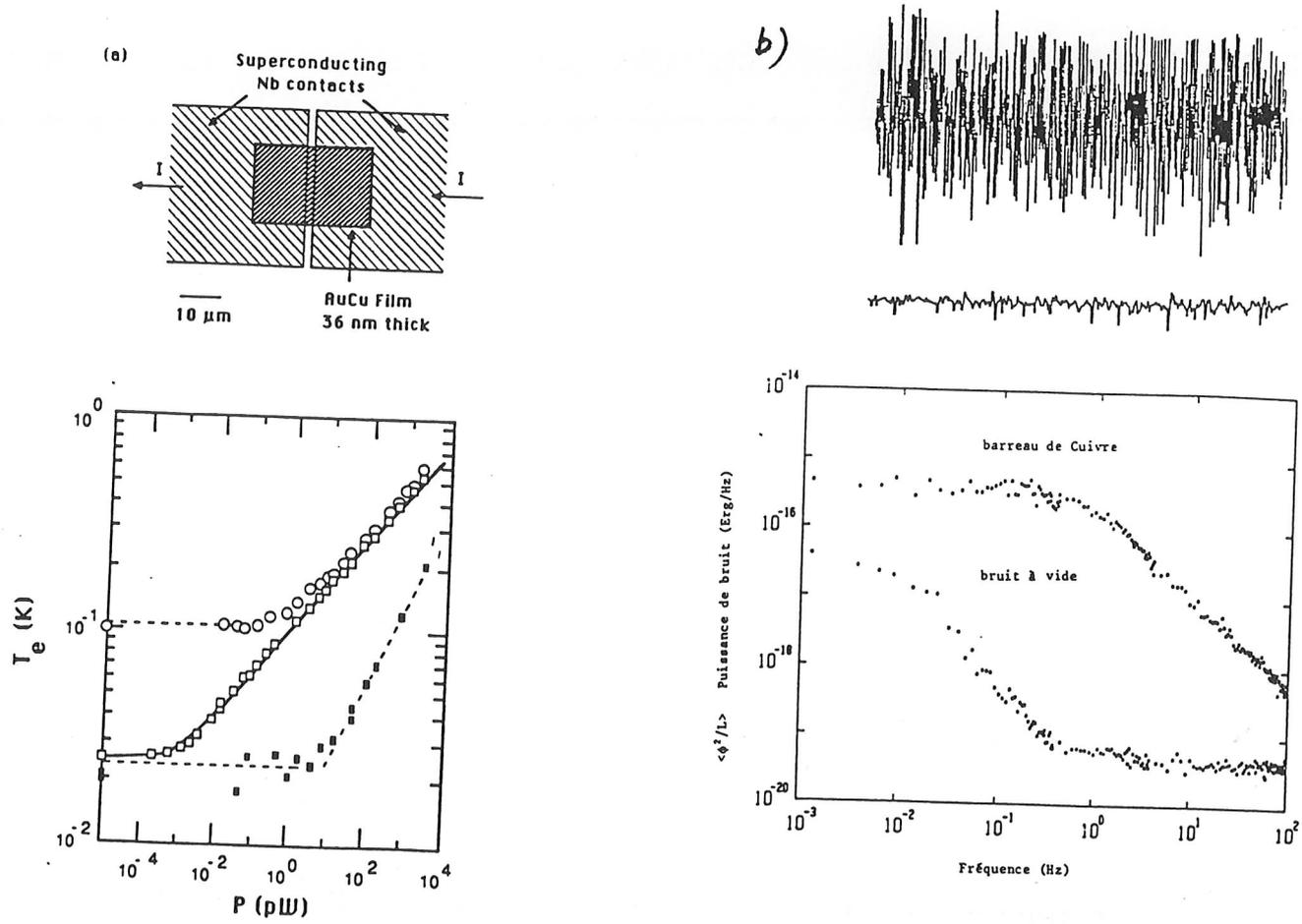


Figure 3: (a) Température de bruit mesurée en insérant un film résistif dans le circuit de l'inductance de couplage d'un SQUID et en faisant passer un courant dans le film résistif. A basse puissance injectée on mesure le bruit de Nyquist du film, à puissance plus élevée intervient l'effet de chauffage des électrons qui peut être ainsi étudié. (b) Bruit mesuré en disposant un barreau de cuivre de diamètre  $a = 5\text{mm}$  à l'intérieur du gradiomètre couplé à un SQUID. Les pertes par courant de Foucault dans le barreau sont décrites à basse fréquence par  $\chi'' = \left(\frac{a}{\delta}\right)^2$  pour  $a < \delta = (\sigma\omega\mu_0)^{-1/2}$  épaisseur de peau. Le bruit associé est indépendant de la fréquence, à plus haute fréquence correspondant à  $a > \delta$  on a  $\chi'' = \left(\frac{\delta}{a}\right)$  et le bruit décroît comme  $\omega^{-3/2}$ .

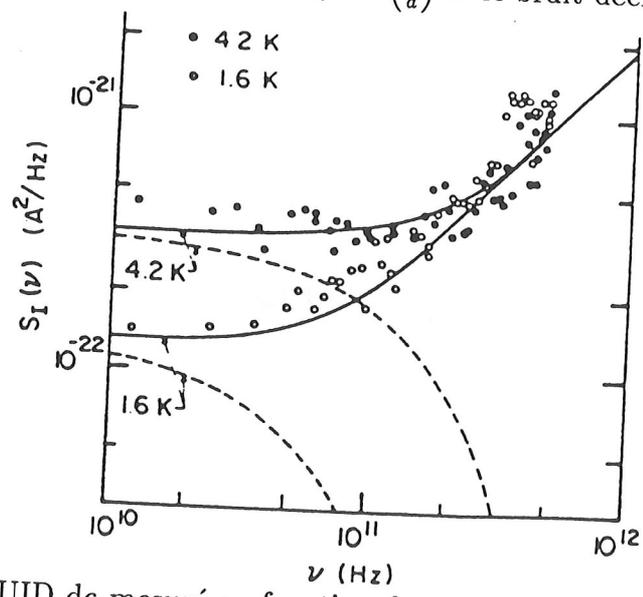


Figure 4: Bruit d'un SQUID dc mesuré en fonction de sa tension de polarisation d'après Koch et al. [7]

quantum de flux supraconducteur. Ils sont en général utilisés en étant couplé par mutuelle à un circuit détecteur inductif dont on peut ainsi mesurer le courant qui le traverse. Contrairement aux FET qui sont adaptés aux impédances élevées les amplificateurs à SQUID sont bien adaptés aux valeurs d'impédances très faibles de l'ordre de  $1m\Omega$ . Leur température de bruit peut être inférieure au  $\mu K$  [5]. Pour mesurer le bruit en courant d'une résistance on peut soit l'insérer dans le circuit détecteur du SQUID cf. figure 3 soit mesurer le bruit des courants de Foucault d'un échantillon métallique disposé à l'intérieur de l'inductance détectrice.

Les jonctions d'un SQUID sont en général shuntées par une résistance Ohmique. Le bruit du SQUID est à ce moment là directement relié au bruit Johnson de la résistance de shunt à la fréquence de fonctionnement du SQUID identique à la fréquence Josephson  $eV/h$  pour un SQUID dc polarisé par une tension  $V$ . Il est alors possible d'avoir accès au spectre de bruit très haute fréquence de la résistance de shunt et d'observer le changement de régime entre le bruit blanc de Nyquist classique et le bruit quantique linéaire en  $\hbar \omega = eV$  dans la limite où  $eV > k_B T$  [7].

Nous verrons dans le paragraphe suivant que l'utilisation de magnétomètres à SQUID a permis de mesurer le bruit thermique de systèmes magnétiques de spins électroniques et nucléaires.

## 2.3 Fluctuations thermiques d'un système magnétique: exemples d'expériences

Si on considère un système de  $N$  spins, paramagnétiques dont la dynamique est décrite par un temps de relaxation  $\tau$  leur susceptibilité s'écrit:

$$\chi(\omega) = \frac{\chi_0}{(1 + i\omega\tau)} \quad (15)$$

Où  $\chi_0$  est la susceptibilité à fréquence nulle décrite par la loi de Curie:  $\chi_0 = N\mu^2/k_B T$  On en déduit à partir du FDT l'expression du bruit thermique :

$$M^2(\omega) = N\mu^2 \frac{\tau}{1 + \omega^2\tau^2} \quad (16)$$

Le spectre de bruit est donc une courbe de Lorentz centrée à fréquence nulle de largeur  $1/\tau$  son intégrale vaut  $N\mu^2$  ce qui correspond à des températures de bruit typiques de:

$$k_B T_N = \frac{1}{V} = \int M^2(\omega) d\omega \quad (17)$$

- $T_n \simeq 1K$  pour des spins électroniques en concentration ( $10^{24}/cm^3$ )
- $T_n \simeq 1\mu K$  pour des spins nucléaires

Toutefois les temps caractéristiques des spins électroniques étant en général beaucoup plus rapides que ceux des spins nucléaires, la puissance de bruit typique de spins nucléaires mesurée dans une bande de fréquence étroite devant  $1/\tau$  peut être supérieure à celle de spins électroniques.

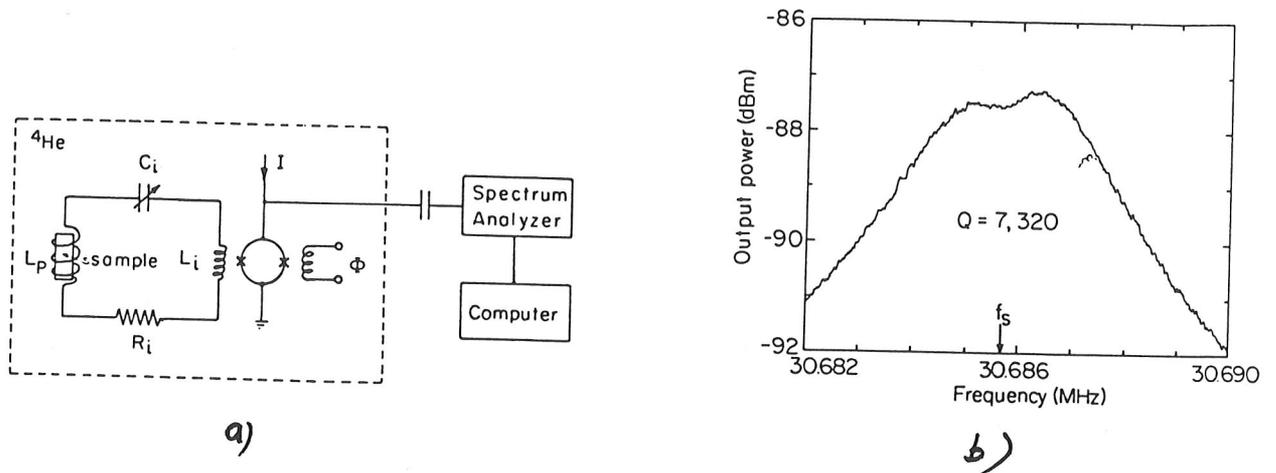


Figure 5: a) Schéma de principe de l'expérience [8] ayant permis la détection du spectre de bruit de spins nucléaires b) Spectre de bruit en courant du circuit résonant en présence des spins nucléaires.

### 2.3.1 Bruit d'aimantation nucléaire

Le bruit de spins nucléaires a pu effectivement être détecté dans une très belle expérience par Sleator et al. [8] sur les spins nucléaires du noyau  $^{35}\text{Cl}$  dans le sel  $\text{NaClO}_3$  présentant une résonance quadrupolaire à  $\omega_0/2\pi = 30\text{MHz}$ . Dans ce cas le spectre de bruit se trouve centré autour de la fréquence  $\omega_0$  avec  $\omega_0\tau \gg 1$  ce qui permet d'utiliser pour la détection un circuit résonant centré autour de  $\omega_0$  avec un grand facteur de qualité  $Q$ . La température de bruit effective se trouve réduite d'un facteur  $Q$ . Le circuit résonant est couplé par mutuelle à un SQUID dc utilisé en amplificateur de courant. On mesure ainsi le bruit de Nyquist en courant du circuit résonant d'impédance  $Z(\omega)$  dont l'inductance est remplie par le sel  $\text{NaClO}_3$ . Lorsque les spins nucléaires sont en équilibre avec le bain thermique, ce bruit est donné par:

$$I^2(\omega) = (2/\pi)k_B T \text{Re}(1/Z(\omega)) \quad (18)$$

Où  $Z(\omega)$  au voisinage de la résonance vaut  $R_c + L\omega\chi_v''(\omega)$  avec  $R_c = L\omega/Q$  résistance du circuit résonant et:

$$\chi_v''(\omega) = \frac{N}{V} \frac{\mu^2 \omega_0 \tau}{1 + (\omega - \omega_0)^2 \tau^2}$$

Ceci permet de comprendre la forme du spectre de bruit détecté figure 5 où la raie nucléaire apparaît comme un trou sur la courbe de résonance correspondant au spectre du bruit en courant du circuit à vide. Dans le cas où la température de spin est très supérieure à celle du réseau la présence des spins nucléaires peut se manifester comme un excès de bruit.

### 2.3.2 Bruit en 1/f dans les systèmes magnétiques désordonnés

Dans les systèmes magnétiques désordonnés la dynamique ne peut pas se décrire à partir d'un temps de relaxation unique mais fait intervenir une large distribution  $g(\tau)$  pour ces temps

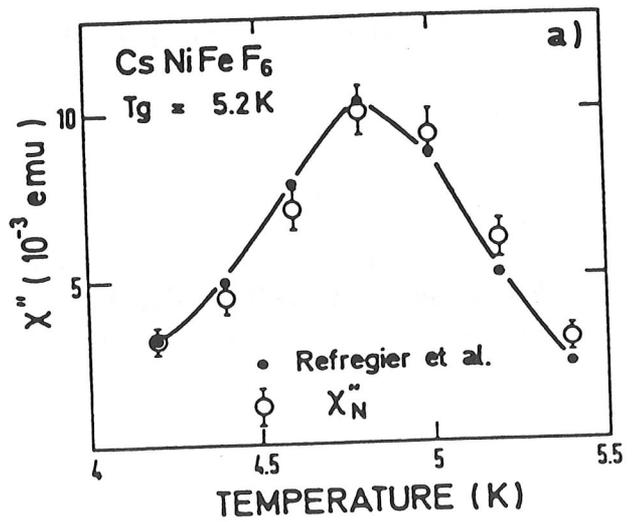
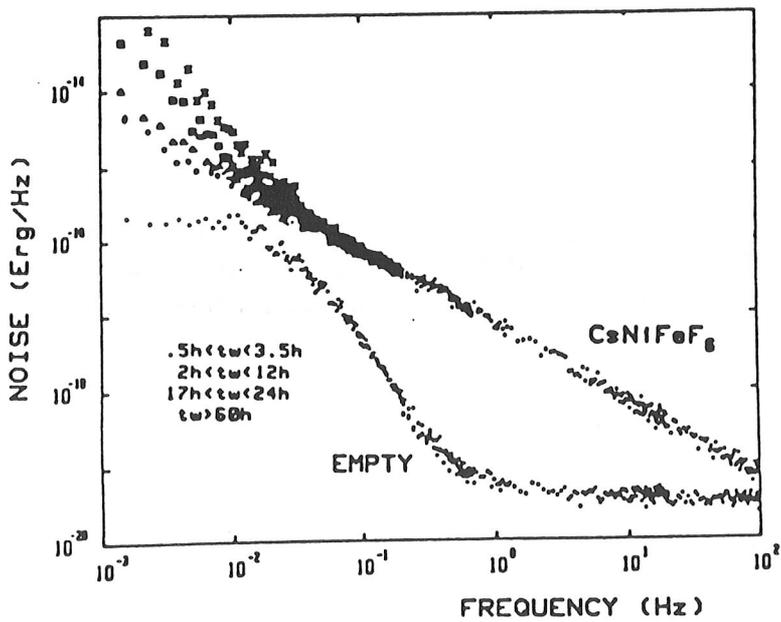
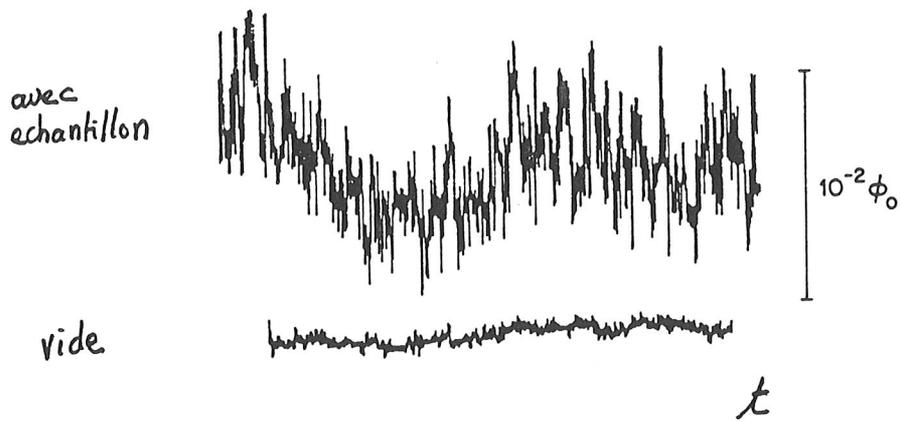


Figure 6: (a) Spectres de bruit magnétique d'un verre de spin isolant  $T_g = 10K$ , pour différents temps d'attente mesuré à partir du moment où l'échantillon est amené à la température d'étude  $T < T_g$ . (b) Comparaison entre les mesures de bruit et de  $\chi''$ : vérification du théorème fluctuation dissipation.

de relaxation. On en déduit le spectre de bruit:

$$M^2(\omega) = k_B T \int \frac{g(\tau)}{1 + \omega^2 \tau^2} d\tau \quad (19)$$

Lorsque  $g(\tau) \propto 1/\tau$  pour des valeurs de  $\tau$  comprises entre  $\tau_{min}$  et  $\tau_{max}$  (ce qui correspond, comme on le reverra par la suite, à une distribution plate d'énergies de barrière pour des processus thermiquement activés), on trouve que le spectre de bruit se comporte en  $1/\omega$  pour  $1/\tau_{max} \ll \omega \ll 1/\tau_{min}$  soit  $\chi''(\omega)$  indépendant de la fréquence et une relaxation en  $-\text{Log}(t)$ . Des fluctuations thermiques en  $1/\omega$  ont été ainsi observées dans de nombreux systèmes tels que:

- les nanostructures ferromagnétiques constituées de grains ferromagnétiques dispersés en taille [9].
- les verres de spin constituées d'impuretés magnétiques réparties au hasard dans une matrice non magnétique ( le désordre de position engendrant un désordre d'interactions.) [10].

La vérification précise du théorème fluctuation dissipation dans les verres de spin à l'espace de phase complexe non ergodique posait une question tout à fait fondamentale. L'analyse des parties stationnaires et vieillissantes des spectres de bruit ainsi que des déviations observées par rapport à la loi en  $1/\omega$  ont donné des renseignements précieux quant au comportement critique au voisinage de la transition verre de spin et à la nature de la dynamique dans la phase basse température. Il a été possible de mettre en évidence deux composantes distinctes dans le bruit observé: Un bruit stationnaire dont la répartition spectrale varie en  $1/f$  entre  $10^{-4} \text{ Hz}$  et  $10^2 \text{ Hz}$  est observé pour des temps d'attente du système supérieure à 48 heures. Dans les premières heures qui suivent la mise à froid du système, nous avons observé un excès de bruit dans les basses fréquences inférieure à  $10^{-2} \text{ Hz}$ , superposé au bruit en  $1/f$ . Cette composante non stationnaire du bruit diminue et se déplace vers les basses fréquences lorsque augmente le temps d'attente. Il est possible de relier qualitativement ce phénomène au vieillissement de la relaxation de l'aimantation thermorémanente observé dans les mêmes conditions. Il a été suggéré que ces fluctuations non stationnaires, présentant une forte analogie avec la dynamique des polymères condensés, sont une manifestation de la recherche d'un état d'équilibre pour le système après une trempe rapide. L'existence d'un bruit stationnaire en  $1/f$  semble quant à elle une caractéristique intrinsèque de la dynamique d'un verre de spin au voisinage d'un état d'équilibre.

## 2.4 Mouvement Brownien: application à la mesure de l'élasticité d'une molécule unique

le mouvement d'une particule dans un fluide est décrite par l'équation de Langevin [11]:

$$m \frac{dv}{dt} = -\alpha v + F(t) \quad (20)$$

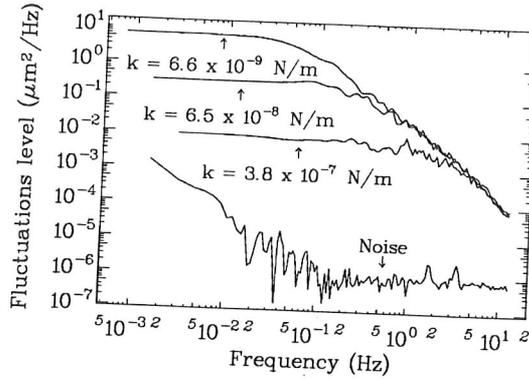


Figure 7: Bruit de position  $x^2(\omega) = v^2(\omega)/\omega^2$  pour observées sur une bille attachée par une molécule d'ADN pour différentes valeurs de constante de raideur.

L'action du réservoir se traduit par un terme de viscosité et une force fluctuante (force de Langevin) dont on considère que le temps de corrélation est suffisamment court pour la décrire par un spectre blanc. En utilisant les relations entre les spectres de bruit de  $F$  et  $v$ :

$$v^2(\omega) = \frac{F^2(\omega)}{m^2\omega^2 + \alpha^2}$$

et le théorème d'équipartition  $\int m v^2(\omega) d\omega = \frac{k_B T}{2}$  On obtient le théorème fluctuation-dissipation pour une particule Brownienne:

$$\begin{aligned} F^2(\omega) &= k_B T \alpha \\ v^2(\omega) &= \frac{k_B T \gamma}{m(\omega^2 + \gamma^2)} \end{aligned} \quad (21)$$

Où  $\gamma = \alpha/m$  on voit que le spectre de bruit fait ici directement intervenir le couplage du système avec le réservoir. (Alors que ce n'est pas le cas du bruit Johnson d'un métal qui dans le cas d'un système d'électrons suffisamment grand ne fait intervenir que le temps de collision élastique.) Le mouvement Brownien est facilement observable sous un microscope. Lorsque la particule Brownienne n'est pas libre, par exemple lorsqu'elle est attachée à une paroi fixe par l'intermédiaire d'un long polymère (cf figure) le spectre de bruit  $v^2(\omega)$  présente une coupure dans les basses fréquences en dessous de  $\omega_c = k/\alpha$  où il varie comme  $k_B T \gamma \omega^2 / \omega_c^2$ . (Ce qui correspond à une résonance suramortie). L'analyse d'un tel spectre de bruit permet ainsi de mesurer l'élasticité d'une molécule unique cette technique a été utilisée par plusieurs groupes travaillant sur l'ADN. Une mesure directe, nécessitant l'application et le contrôle de forces extrêmement faibles de l'ordre de  $10^{-15} N$  étant pratiquement impossible [12]. Le même principe peut être utilisé pour la détermination de l'élasticité d'une poutrelle dans un microscope à force.

### 3 Fluctuations thermiques et quantiques des défauts dans un métal ou semi-conducteur : Du bruit télégraphique au bruit en $1/f$

Comme on le sait tous le bruit en  $1/f$  est un phénomène très général que l'on observe dans des domaines très variés [1]. Lorsqu'on fait passer un courant  $I$  dans une résistance on observe un

excès de bruit en tension par rapport au bruit de Nyquist, dont le spectre en fréquence varie approximativement comme  $1/f$  et dont la puissance est proportionnelle à  $I^2$ . Après quelques controverses qui ont donné lieu à des modèles très compliqués pour ce bruit, on estime qu'il est relié tout simplement aux fluctuations à l'équilibre de la résistance  $\delta R^2(\omega)$  provoquées par les mouvements des impuretés. Le courant n'étant en aucun cas responsable de ce bruit mais permettant de le révéler. Pendant longtemps sa description est restée très qualitative, Hooge [13] a montré qu'il varie comme :

$$\frac{\delta R^2}{R^2} = \alpha/N \quad (22)$$

où  $N$  est le nombre de porteurs dans la résistance et  $\alpha$  est une constante qui vaut de l'ordre de  $10^{-2}$ . Une compréhension plus fine du bruit en  $1/f$  passe par une description du transport aux échelles mésoscopiques.

### 3.1 Rappel concernant les fluctuations de conductance dans un système mésoscopique

Il existe un certain nombre de longueurs caractéristiques importantes pour le transport:  $l_e$  le libre parcours moyen élastique des électrons et  $L_\phi$  la longueur de cohérence de phase des fonctions d'onde électronique limitée par l'ensemble des processus inélastiques, collisions électron-phonon, électron-électron, mais aussi de façon plus générale tout processus modifiant de façon irréversible le réservoir.  $L_\phi$  à basse température peut atteindre quelques microns même dans des systèmes où  $l_e$  ne dépasse pas quelques dizaines de nm. On appelle mésoscopique un système dont toutes les dimensions sont inférieures à  $L_\phi$  [14]. On peut montrer que la conductance d'un tel système s'exprime en fonction de la matrice  $t$  des amplitudes de diffusion  $t_{\vec{k},\vec{k}'}$  d'une onde plane caractérisée par son vecteur d'onde incident  $\vec{k}$  vers une onde plane transmise avec le vecteur d'onde  $\vec{k}'$  et vaut:

$$G = \frac{e^2}{h} \text{tr}(tt^\dagger) \quad (23)$$

Dans le cas d'un conducteur parfait constitué d'un barreau de section  $S$  et de longueur  $L$ :  $t_{\vec{k},\vec{k}'} = \delta_{\vec{k},\vec{k}'}$  et on trouve que la conductance est quantifiée et vaut  $Me^2/h$  où  $M \sim S/\lambda_F^2$  est le nombre de canaux de transmission du barreau, cette quantification de la conductance a été observée expérimentalement [16]. Dans le cas d'un système désordonné la conductance moyenne est égale à la conductance de DRUDE  $G_D = ne^2\tau S/mL$  qui peut se réécrire  $M(e^2/h)(l_e/L)$  où  $M_{eff} = Ml_e/L$  s'interprète comme le nombre de canaux effectifs de transmission d'un système désordonné. Mais plus important pour ce qui nous intéresse, la conductance d'un système mésoscopique présente des fluctuations en fonction de la réalisation microscopique du désordre dans l'échantillon qui détermine les interférences entre les diverses trajectoires électroniques. L'amplitude de ces fluctuations est universelle, elle ne dépend ni du désordre ni des dimensions de l'échantillon (tant qu'elles restent inférieures à  $L_\phi$ ) et vaut  $e^2/h$  [17].

### 3.2 Systèmes à 2 niveaux et bruit télégraphique dans un système mésoscopique

On est ainsi amené à se demander quelle variation typique de conductance  $\delta G_i$  peut être induite par le changement de position d'une impureté unique sur une distance supérieure à  $\lambda_F$ . On s'attend à un résultat de l'ordre de:  $\delta G_i \sim p_i e^2/h$  où  $p_i$  est la fraction des trajectoires

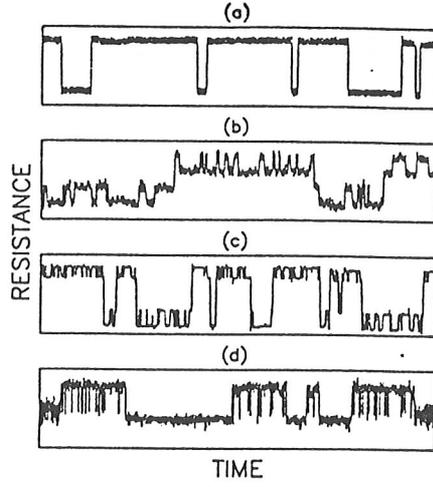


Figure 8: Exemples de bruit télégraphique observé en dessous de 150K dans une constriction nanométrique en cuivre par Ralls et al.[20]

électroniques visitant le site  $i$ , identique à la fraction d'impuretés de l'échantillon visitées au cours d'une trajectoire diffusive typique.

$$p_i = N_v/N_{imp} \quad (24)$$

où  $N_v = \tau_D/\tau_e = L^2/l_e^2$  est le nombre d'impuretés dans l'échantillon  $N_{imp} = c_{imp}L^d$ . En approximant la distance moyenne entre impuretés avec  $l_e$  ce qui n'est correct que dans la limite de très fort désordre (i.e.  $k_f l_e \sim 1$ ), on obtient :

$$p_i = \delta g_i = \left(\frac{L}{l_e}\right)^{2-d} \quad (25)$$

Soit à 2D une fluctuation  $\delta G_i$  du même ordre de grandeur que celle induite par un réarrangement de toute les impuretés de l'échantillon. Cependant dans le cas plus réaliste d'un désordre modéré ce résultat est réduit d'un facteur  $(k_F l_e)^{d-1}$ , [18]. On en déduit dans le cas d'un échantillon cohérent bidimensionnel  $d \ll L \ll L_\phi$ :

$$\delta G_1^2 = \left(\frac{e^2}{h^2} \frac{1}{k_F l_e}\right)^2 \frac{l_e}{d} \quad (26)$$

Le bruit de résistance généré par le saut d'une seule impureté entre deux positions énergétiquement possibles (système à deux niveaux) peut ainsi être observé lors qu'on travaille sur des échantillons suffisamment petits. (dans certains cas ce bruit a pu être observé jusqu'à température ordinaire!). En effectuant une analyse de ce bruit télégraphique (cf figure 8) on peut déterminer les temps caractéristiques  $\gamma_f^{-1}$  et  $\gamma_s^{-1}$  du système à deux niveaux, correspondant aux temps de vie de ses états d'énergie supérieure et inférieure. En étudiant leur dépendance en température dans le régime d'activation thermique:  $\gamma_{f,s} = \exp(E_{f,s})/k_B T$  On peut ainsi déduire les paramètres caractéristiques de sa structure caractéristique en double puit dissymétrique: en particulier le décalage en énergie du double puit est donné par  $\epsilon = E_f - E_s$ . A très basse température et pour des défauts tels que:  $\epsilon < k_B T$  apparaissent des déviations par rapport aux lois thermiquement activées. En particulier on observe une remontée de  $\gamma_f$  et  $\gamma_s$  à basse température qui a peut être comprise dans le cadre d'un modèle d'effet tunnel dissipatif [21]. En effectuant ce type d'étude sur des échantillons mésoscopiques à base d'AsGa contenant des nanograins ferromagnétiques (As Er) [19], il a été possible d'étudier les temps caractéristiques liés au renversement d'un domaine magnétique unique.

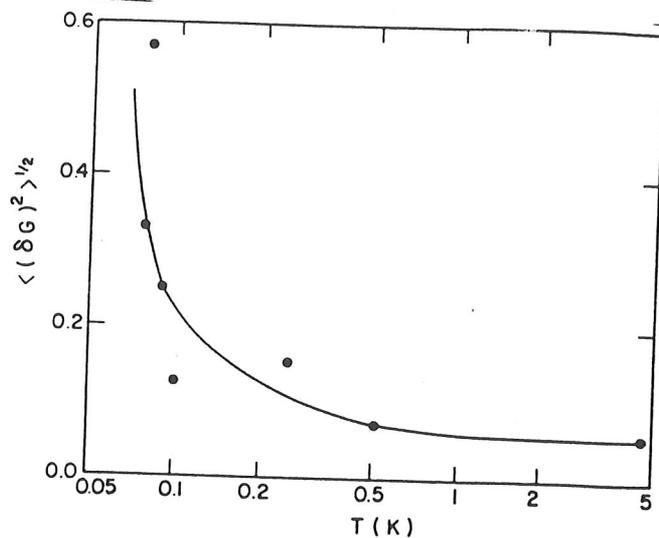
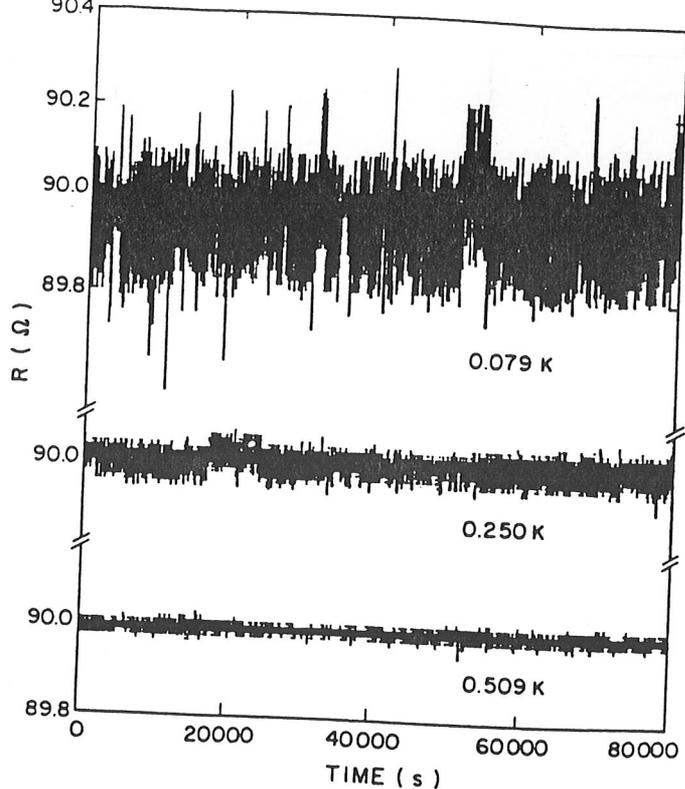


Figure 9: (a) Bruit en  $1/f$  observé dans des films d'Ag à basse température [22].

### 3.3 Limite macroscopique: bruit en $1/f$

Lorsque la taille de l'échantillon augmente on arrive à une situation où une multitude de systèmes à deux niveaux sont simultanément actifs, on est alors amenés à les caractériser par la distribution  $n(E)$  qui est le nombre de systèmes à deux niveaux actifs par unité de volume et d'énergie. Lorsque cette distribution est plate en énergie, on retrouve une distribution de temps de relaxation en  $1/\tau$  et un bruit en  $1/f$ .

L'amplitude du bruit de conductance en  $1/f$ , pour un échantillon quantiquement cohérent de taille  $L_\phi$  s'écrit: [18]:

$$P(f, L_\phi) = p(L_\phi) \delta G_1^2 / f$$

par unité de bande de fréquence

où  $p(L_\phi) = n_{TLS} T dL_\phi^2$  est le nombre de défauts mobiles à la température  $T$  dans le volume considéré. Lorsque les dimensions planaires de l'échantillon dépassent  $L_{phi}$  le bruit résulte d'une superposition incohérente des contributions des régions cohérentes:

$$P(f, L) = \left(\frac{L_\phi}{L}\right)^2 P(f, L_\phi) = n_{TLS} T L_\phi^2 l_e \left(\frac{e^2 L_\phi}{h L}\right)^2 \frac{1}{(k_F l_e)^2 f} \quad (27)$$

A basse température la longueur de cohérence d'un film métallique limitée par les interactions électron-électron varie comme  $1/\sqrt{T}$  on en déduit une remontée du bruit en  $1/T$  observée expérimentalement dans des films métalliques [22, 23] cf fig.9.

Un autre caractéristique du bruit en  $1/f$  est sa grande sensibilité à la force du potentiel de désordre (par le biais du facteur  $1/(k_F l_e)^2$ ). Cette sensibilité au potentiel de désordre explose littéralement lorsqu'on s'approche de la transition métal isolant comme on en voit l'illustration figure 10. Il a été suggéré que dans ce régime les fluctuations de potentiel d'impuretés sont telles que la résistance fluctue entre sa valeur dans l'état métallique de celle dans l'état isolant.

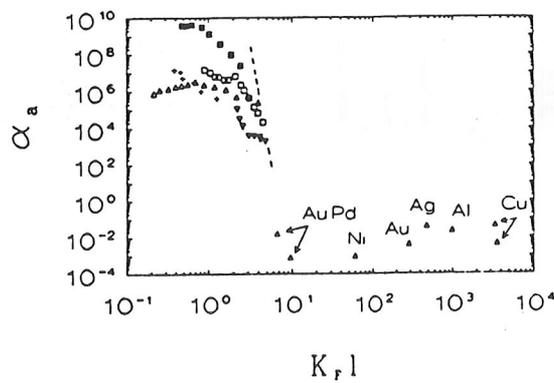
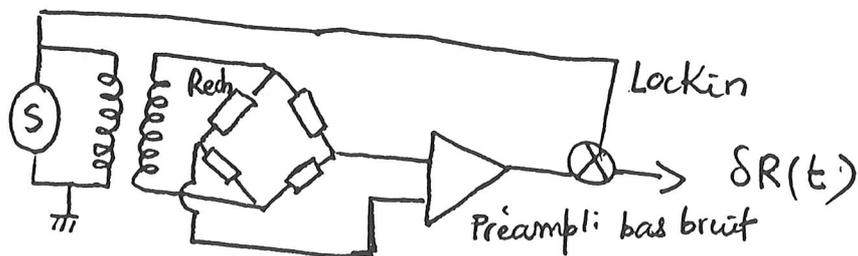


Figure 10: Amplitude du bruit en  $1/f$  en fonction du désordre mesuré par le paramètre  $k_f l$  pour différents matériaux (oxydes de Zinc ou d'Indium) en comparaison avec celui de métaux typiques.

L'étude du bruit est à notre connaissance la seule technique permettant d'avoir accès à la dynamique des impuretés dans un métal pour laquelle on maîtrise en général mal le champ conjugué. Il existe des exceptions lorsque les impuretés peuvent être bougées sous l'effet d'un champ électrique ou d'un champ magnétique. Le bruit en résistance d'un verre de spin métallique est en effet très corrélé au bruit magnétique que nous avons discuté dans le chapitre précédent. Son étude dans le régime mésoscopique a permis de mettre en évidence des effets inusuels comme un caractère violemment non Gaussien du bruit dans la phase basse température qui a été interprété comme la signature de la complexité de la structure des états minimum d'énergie libre dans la phase basse température.[25]



### 3.3.1 Dispositifs expérimentaux spécifiques à la mesure de bruit de résistance:

Le dispositif expérimental typique pour mesurer le bruit en  $1/f$  d'un film métallique schématisé ci-dessous. On utilise un montage en pont de wheatstone dont l'échantillon constitue une des branches (les autres résistances sont choisies telles qu'elles aient un bruit en  $1/f$  négligeable. Ce pont est alimenté en alternatif (à une fréquence pas trop basse) ce qui permet de déplacer le spectre de bruit de l'échantillon autour de la fréquence de modulation et travailler ainsi en dehors du bruit en  $1/f$  des amplificateurs. Après préamplification par un amplificateur faible bruit adapté, en général FET ou FET précédé d'un transformateur adaptant l'impédance de l'échantillon à  $R_{opt}$ , le signal est démodulé par une détection synchrone utilisée sans ampli sélectif et avec une constante de temps courte pour avoir une bonne dynamique sur le bruit. Pour améliorer l'expérience on peut exciter le pont à 2 fréquences différentes travailler en corrélant le bruit mesuré par deux détections synchrones détectant chacune de ces fréquences. On élimine ainsi le bruit des préamplificateurs décorrélés en ne gardant que le bruit de résistance de l'échantillon.

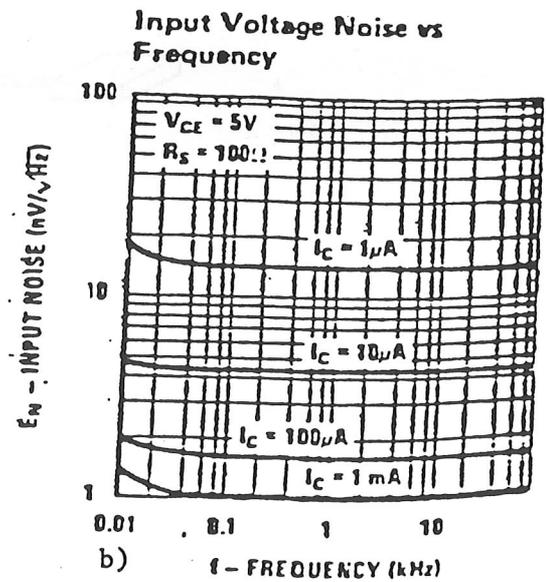
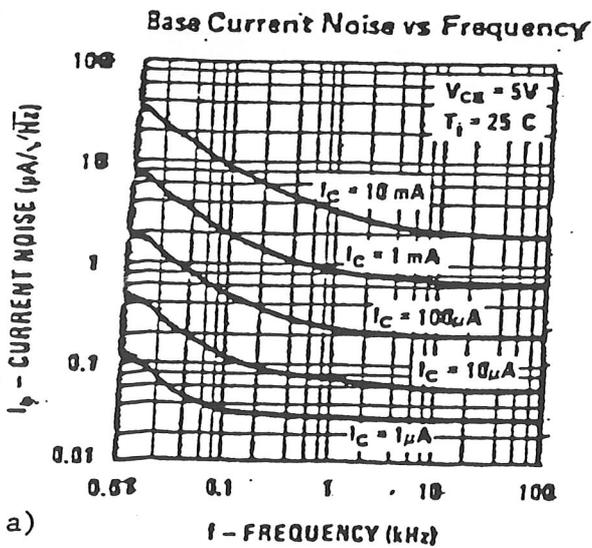


Figure 11

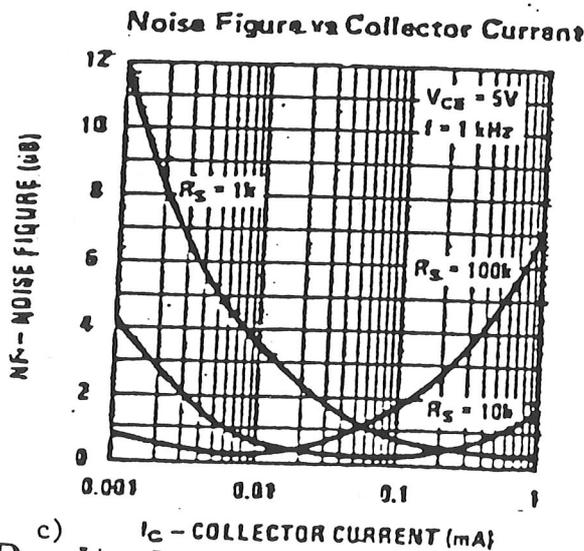


Figure de bruit du transistor LM394 pour différentes valeurs du courant de polarisation du transistor.

- a) le bruit en courant croît linéairement à  $I_c$ .
- b) le bruit en tension décroît comme  $1/I_c$ .
- c) Existence d'une polarisation optimale, pour chaque valeur de la résistance source.

(d'après documentation National Semiconductor)

## 4 Bruits hors d'équilibre.

### 4.1 Bruit grenaille

#### 4.1.1 Limite classique: diodes à vide, transistor

Si on considère un courant d'électrons  $I$  dans le vide. La quantification de la charge est à l'origine d'un bruit dit bruit grenaille associé à l'arrivée des électrons de façon aléatoire et indépendante:

$$\delta I(t) = e \sum_i \delta(t - t_i)$$

, (les  $t_i$  étant distribués de façon aléatoire avec  $\langle t_{i+1} - t_i \rangle = \Delta t = e/I$ ) dont la transformée de Fourier calculée sur l'intervalle de temps  $1/\delta\omega$  vaut

$$\delta I(\omega) = e \sum_{t_i < (\delta\omega)^{-1}} \delta\omega \exp(i\omega t_i)$$

d'où le spectre de bruit par unité de bande de fréquence:

$$\frac{(\delta I(\omega))^2}{\delta\omega} = 2e^2/\Delta t = 2eI$$

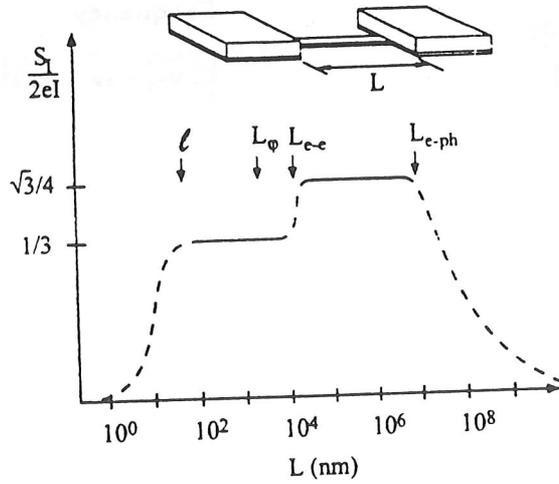


Figure 12: Différents régime de bruit grenaille d'après [27]

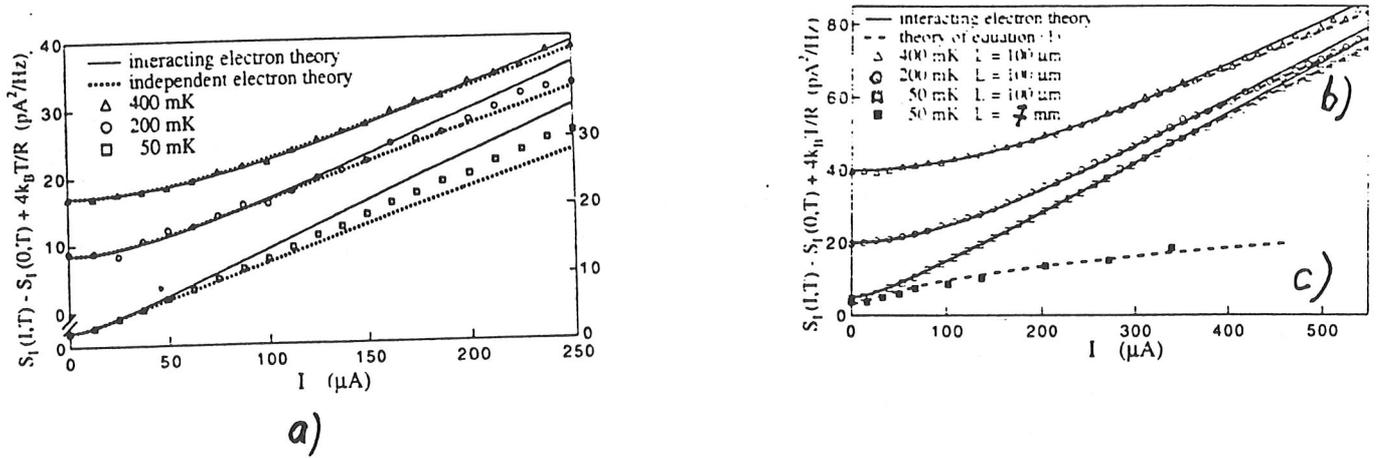


Figure 13: Bruit mesuré dans des fils d'Ag (a)  $L = 1\mu m < l_{ee}$  (b)  $l_{ee} < L = 100\mu m < L_{eph}$  et (c)  $L > L_{eph}$  d'après [27]

Ce bruit blanc qui est l'analogie du bruit de photons en optique, a été observé de longue date dans les diodes à vide [26] puis dans les jonctions. On l'observe aussi dans les transistors. Il a été vérifié que le bruit en courant dans la zone de fréquence où il est plat en fréquence vaut  $ei_f$  où  $i_f$  est respectivement le courant de base ou le courant de grille pour les transistors bipolaires ou à effet de champ. Ce bruit est très important ( $qppA/\sqrt{Hz}$ ) dans les transistors bipolaires pour lesquels le courant dans la base dépend du point de fonctionnement du transistor (cf figure 11). Par contre le courant grille dans un FET est quasiment indépendant du point de fonctionnement. Le bruit grenaille y est donc très faible surtout à basse température où il peut ne pas dépasser  $10^{-16} A/\sqrt{Hz}$ .

#### 4.1.2 Limite quantique: systèmes mésoscopiques: régime ballistique et diffusif

Lorsqu'on mesure le bruit d'une résistance traversée par un courant on s'attendrait donc à mesurer, en sus du bruit Johnson le bruit grenaille des électrons lorsque la tension aux bornes de la résistance est telle qu  $eV > k_B T$ . Ce n'est pas le cas pour une résistance macroscopique. Le bruit grenaille n'est observé que dans le régime mésoscopique, plus précisément lorsque la taille de l'échantillon  $L$  est inférieure à la longueur d'interaction électron-phonon  $L_{e-ph}$  (cette

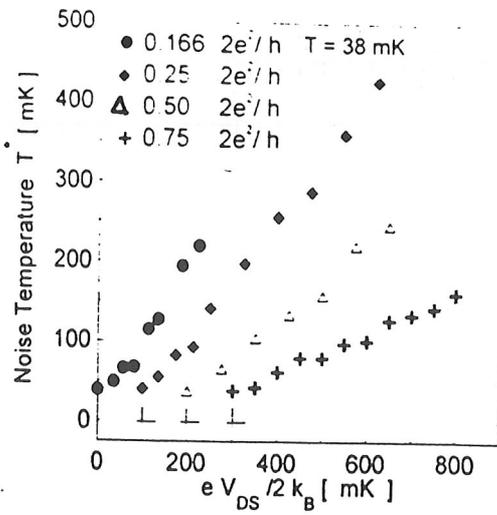


Figure 14: Bruit mesuré dans une constriction GaAs/GaAlAs pour différentes largeurs de canal contrôlées par une grille. [28]

longueur étant en général à basse température bien supérieure à  $L_\phi$ ). C'est à dire lorsque les électrons traversent l'échantillon sans être thermalisés avec le réservoir. Si  $L$  est supérieure à  $l_{ee}$ , la longueur d'interaction électron-électron les électrons sont thermalisés entre eux et présentent un profil de température inhomogène spatialement avec une température de l'ordre de  $k_B T + eV$  au centre de l'échantillon, dans cette image d'électrons chaud on prédit un bruit grenaille réduit:  $S_I = \sqrt{3}/42eI$ . Dans le régime où  $L < L_{ee}$  on prédit un bruit  $S_I = 2/3Ie$  (cf figure 12) ce résultat reste identique à lui même dans le régime mésoscopique  $L < L_\phi$  tant que le transport est diffusif.

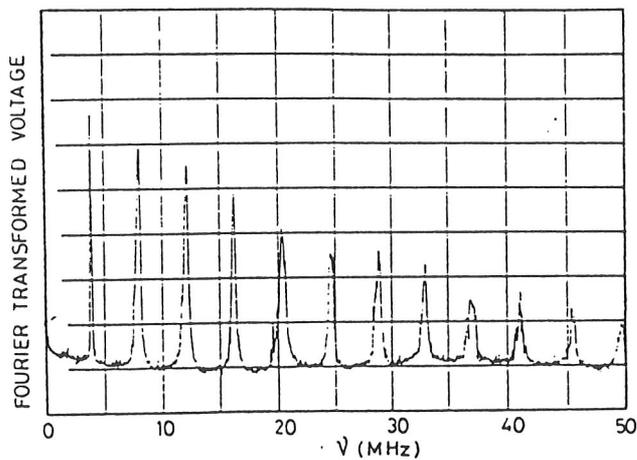
Ces différents régimes de bruit grenaille dans les métaux ont pu être testés expérimentalement sur des échantillons d'argent, avec une précision remarquable en utilisant un SQUID dc comme amplificateur de courant.

Dans le régime ballistique on prédit une réduction dramatique du bruit liée au principe de Pauli qui introduit des corrélations entre électrons. En effet dans le cas d'un conducteur parfait où la distance entre électrons est de l'ordre de grandeur de la longueur d'onde de Fermi, le principe d'exclusion de Pauli fait en sorte que les électrons ont tendance à se propager sous forme de paquets d'onde régulièrement espacés dans le temps. Au lieu donc de constituer un bruit blanc on s'attend à ce que les électrons arrivent de façon quasiment périodique. D'où la prédiction d'un spectre de bruit piqué en  $I/2e$ . Les prédictions concernant la composante blanche du bruit grenaille à basse fréquence sont quant à elles :

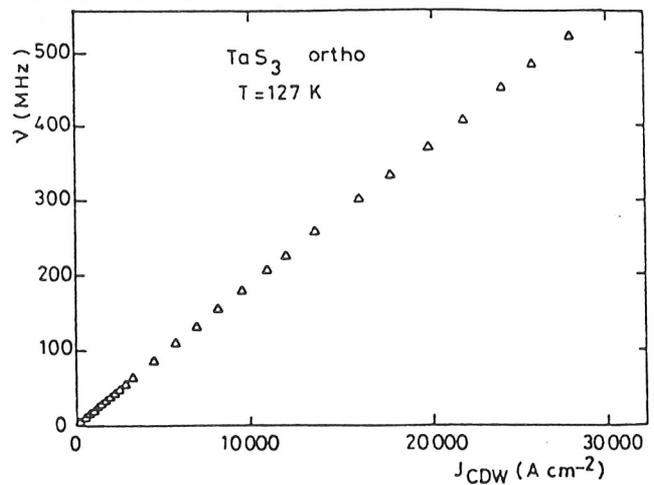
$$S_I = 2eI \sum_{n=1}^M \frac{T_n(1 - T_n)}{M} \quad (28)$$

$T_n$  est le coefficient de transmission du canal  $n$ . Le bruit grenaille est donc nul pour un conducteur parfait pour lesquels tous les  $T_n$  valent 0 ou 1. Ce comportement du bruit grenaille a pu être observé dans un échantillon ballistique (GaAs/GaAlAs) [28] dont la largeur et donc le nombre de canaux de conduction peut être ajusté en polarisant une grille métallique déposée au dessus du gaz d'électrons 2D.

Il reste à aussi à explorer le bruit Grenaille dans la limite opposée de fort désordre au voisinage de la transition métal isolant ainsi que peut-être encore plus intéressant encore le bruit grenaille dans le régime d'effet Hall quantique fractionnaire.



a)



b)

Figure 15: a) Transformée de Fourier du bruit en tension observé dans le système à onde de densité de charge  $NbSe_3$  au dessus du champ seuil. (b) Variations de la fréquence fondamentale en fonction du courant traversant l'échantillon, d'après [30]

## 4.2 Bruit d'une onde de densité de charge

Il existe une autre situation physique où le passage d'un courant peut être à l'origine d'un bruit quasi-périodique dont la fréquence est proportionnelle au courant. Ce sont les systèmes électroniques de structure quasi unidimensionnelle instables vis à vis d'une distortion du réseau à  $2k_F$  et pour lesquelles les électrons de conduction se condensent en une onde de densité de charge :ODC. A basse température cette ODC est accrochée aux impuretés du réseau et la résistance en champ électrique faible est infinie [29]. Un champ électrique permet de décrocher l'ODC qui peut alors transporter un courant dont le passage s'accompagne d'un bruit caractéristique de fréquence  $v_g/\lambda$  plus harmoniques, (cf figure 15), rapport entre la vitesse de glissement de l'onde et de la période spatiale de la distortion du réseau dont elle est issue. Ce bruit "bande étroite" a été observé dans de nombreux systèmes [30].

## Références

- [1] Horowitz "The art of electronics" Cambridge University Press (1980)
- [2] Landau et Lifchitz "Mécanique statistique" Editions MIR (1964)
- [3] J.B. Johnson Phys.Rev. **32** 97 (1928), H.Nyquist **32** 110 (1928)
- [4] L.Lanzi et al. Cryogenics **34** 959 (1994)
- [5] J. Clarke "Advances in superconductivity" Deaver and Ruvalda, Plenum (1983)
- [6] F.C. Wellstood, C.Urbina and J. Clarke PRB (1993)
- [7] R.K.Koch et al. PRB **26** 74 (1982)
- [8] T.Sleator et al. PRL **55**, 1742 (1985)

- [9] S.Vitale et al. Physica B **194** 259 (1994)
- [10] M. Ocio, H. Bouchiat, P. Monod J.de Physique lettres 46(1985)L647 J.M.M.M 54(1986)11, H.Bouchiat and M.Ocio Comments in condensed matter physics 14,163 (1988)
- [11] F.Reif "Statistical and thermal physics" McGraw-Hill, (1985)
- [12] J. Gelles, B. J. Schnapp, and M. Sheetz, *Nature* **331**, 450 (1988) T.R Strick et al. Science **271**, 1835 (1996)
- [13] F.N. Hooge Phys.lett. **29 A** 139 (1969)
- [14] S. Washburn and R. Webb, Advances in Physics **35**, 375 (1986).*Mesoscopic Phenomena in Solids*, edited by B. Al'tshuler, P. Lee, and R. Webb (Elsevier Science Publishers, Amsterdam, 1991),"Mesoscopic quantum physics", Ackermans, Montembaux, Pichard ed, Elsevier North Holland(1995)
- [15] Y. Imry, Europhysics Letters **1**, 249 (1986).
- [16] B. J. van Wees *et al.*, Phys. Rev. Lett. **60**, 848 (1988).
- [17] P. Lee and A. Stone, Phys. Rev. Lett. **55**, 1622 (1985).
- [18] S. Feng, P. Lee, and A. Stone, Phys. Rev. Lett. **56**, 1960 (1986).
- [19] F.Coppinger et al. PRL**75**, 3513 (1995)
- [20] K. Ralls and R. Buhrman, Phys. Rev. Lett. **60**, 2434 (1988).
- [21] N. Zimmerman, B. Golding, and W. H. Haemmerle, Phys. Rev. Lett. **67**, 1322 (1991).
- [22] T. Meisenheimer and N. Giordano, Phys. Rev. B **39**, 9929 (1989).
- [23] N. Birge, B. Golding, and W. Haemmerle, Phys. Rev. Lett. **62**, 195 (1989).
- [24] O.Cohen et al. PRL**69**, 3555 (1992)
- [25] M. B. Weissman, Review of Modern Physics **65**, 829 (1993)
- [26] W. Schottky Ann.d.Phys. **57**, 541 (1918)
- [27] A.H. Steinbach et al. PRL**76**, 3806(1996)
- [28] A.Kumar et al. PRL**75**, 2778 (1996)
- [29] G.Gruner et M.Zetl Rev. of Mod. Phys. (1984)
- [30] J.Monceau et al. PRL **37**, 602 (1976)

