Electronique de bolomètres pour la mesure d'une puissance de rayonnement

A. BENOIT

DRTBT 1996 - 03

Electronique de bolomètres pour la mesure d'une puissance de rayonnement

Table des matières

Introduction.

Dans ce cours, nous discuterons la mesure des bolomètres utilisée pour la mesure du rayonnement sub-millimétrique, principalement pour des études d'Astrophysique. Les systèmes actuels utilisent principalement des bolomètres résistifs avec un thermomètre à la limite de la transition métal-isolant (la résistance augmente très vite lorsque la température diminue). Cependant, certaines parties de la discussion peuvent aussi bien s'appliquer aux bolomètres supraconducteurs. De même, si la discussion est centrée sur la mesure continue d'une puissance de rayonnement, certaines idées développées ici peuvent aussi s'appliquer aux bolomètres pour la détection de particules.

Notations utilisées.

1) Différents paramètres du bolomètre

C	Capacité calorifique du bolomètre
g	Conduction de la fuite thermique qui relie le bolomètre au cryostat
R	Résistance du bolomètre
R_p	Résistance de polarisation
α	Le coefficient de réponse du bolomètre : $\alpha = \frac{\Delta R/R}{\Delta T/T}$

2) Constantes de temps et fréquences

τ_{th}	Constante de temps thermique du bolomètre : $\tau_{th} = \frac{C}{g}$
f_{th}	Fréquence associée à cette constante de temps : $f_{th} = \frac{1}{2\pi \ \tau_{th}}$
τ_{el}	Constante de temps électrique du bolomètre : $\tau_{el} = R\,C$, où R est la résistance du bolomètre et C la capacité du bolomètre et des fils de liaison.
f_{mod}	Fréquence de la modulation électrique
τ_{mod}	Constante de temps associée: $\tau_{mod} = \frac{1}{2\pi \ f_{mod}}$
f_{min}	Fréquence minimum du signal à mesurer
f_{max}	Fréquence maximum du signal à mesurer

3) Densités spectrales de bruit

S_T	La densité spectrale de bruit par racine de Hertz en température
S_V	La densité spectrale de bruit par racine de Hertz en tension sur le bolomètre
S_P	La densité spectrale de bruit par racine de Hertz en puissance de radiation sur le bolomètre: c'est la NEP du bolomètre (Noise Equivalent Power)

A. Bolomètres pour le rayonnement sub-millimétrique

1) Mesure dans le domaine sub-millimétrique

Lorsque l'on utilise les bolomètres dans le domaine sub-millimétrique, il n'est pas possible de compter les photons individuellement et de mesurer leur énergie car celle-ci est trop faible. L'energie d'un photon à 1mm de longueur d'onde correspond environ à une température de 10K et à une énergie de 1mEV, soit plus de 3 ordres de grandeur inférieur à la résolution des meilleurs bolomètres. La mesure est donc une mesure de la puissance moyenne déposée par le rayonnement sur la cible. Il nous faut donc mesurer la température du bolomètre dans une bande de fréquence qui est définie par le signal à mesurer.

2) Modulation optique et bande de fréquence

a) Télescope au sol.

Pour mesurer un signal, le plus simple consiste à déplacer le téléscope et ainsi le point d'observation sur le ciel. On compare alors le signal à mesurer avec un point de référence sur le ciel. La vitesse de déplacement du télescope est limitée et ce type de mesure exige une bande passante vers les basses fréquences jusque vers f_{min} = 0.1Hz. Pour faciliter les mesures, on peut utiliser un dispositif mécanique de modulation qui permet un déplacement rapide du faisceau entre deux ou trois points du ciel, ou entre un point du ciel et une source de référence. La fréquence de modulation de ces dispositifs est généralement limitée à quelques hertz (3Hz pour le secondaire vibrant du télescope de 30 m de pico Veleta).

b) Satellite d'observation.

Dans un satellite d'observation astronomique, il est préférable, pour des raisons de simplicité et de fiabilité, de ne pas avoir de dispositif mécanique de modulation. La seule solution alors consiste à faire tourner le satellite sur lui même. La vitesse de rotation définie la bande de fréquence du signal à mesurer. Pour COBRAS/SAMBA par exemple, la vitesse est de 1 tour/ minute, soit une fréquence basse f_{min} = 0.016 Hz. Compte tenu de la résolution angulaire de 5 minute d'arc, la fréquence maximum du signal est f_{max} = 120 Hz .

b) Conclusion.

L'électronique permettant de lire la température du bolomètre devra avoir un bruit faible dans toute la bande passante demandée entre f_{min} et f_{max}. Un système avec un faible bruit à très basse fréquence (jusqu'à 0.1 ou 0.01Hz) est souhaitable.

3) Dynamique du signal.

Le dernier point important est l'amplitude des variations mesurées comparée à la puissance totale reçue sur le bolomètre. Cette puissance est typiquement de l'ordre de 1 à 100 picowatt. On voudra mesurer des variations de cette puissance de l'ordre de 10^{-4} à 10^{-6} , l'idéal étant de n'être limité que par le bruit de photon. Les photons arrivant de manière aléatoire, si N est le nombre de photons par seconde, la fluctuation de puissance (par racine de Hz) S_P est donnée par :

$$\frac{S_P}{P} = \frac{\sqrt{N}}{N}$$

Une puissance de P = 10 pW correspond typiquement à 10^{11} photons par seconde (10^{-22} joule par photon) dans le domaine millimétrique et une fluctuation :

$$\frac{S_P}{P} = 3\ 10^{-6} / \sqrt{Hz}$$

4) Température de bruit typique

La sensibilité d'un bolomètre idéal sera limitée par son bruit thermodynamique qui donne des fluctuations de température d'amplitude donnée par

$$\sqrt{<\Delta T^2>} = \sqrt{\frac{K_b\ T^2}{C}}$$

où C est la capacité calorifique du bolomètre et K_b est la constante de Boltzman. Ces fluctuations sont contenues dans une bande de fréquence définie par la constante de temps du bolomètre

$$\tau = \frac{C}{g}$$

où g est la conduction de la fuite thermique qui relie le bolomètre au cryostat.

On en déduit que la densité spectrale de bruit en température S_T (par racine de Hz) ne dépend pas de la capacité calorifique :

$$S_T = \sqrt{4\tau}\sqrt{<\Delta T^2>} = \sqrt{\frac{4\ K_b\ T^2}{g}}$$

Si l'on suppose que g est suffisant pour permettre à la puissance électrique de mesure du bolomètre de s'écouler vers le cryostat, on obtient:

$$R\ I^2 = g\ T \qquad \text{et} \qquad \frac{S_T}{T} = \sqrt{\frac{4\ K_b\ T}{R\ I^2}}$$

En tenant compte de α, la réponse sans dimension du bolomètre, on obtient la réponse en tension pour une polarisation à courant constant:

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta R}{R} = \alpha \frac{\Delta T}{T}$$

Le bruit en tension généré par le bruit thermodynamique est alors:

$$\frac{S_V}{V} = |\alpha| \frac{S_T}{T}$$

$$S_V = |\alpha| \sqrt{4\ K_b\ T\ R}$$

Il est comparable au bruit Johnson de la résistance: $S_V = \sqrt{4\ K_b\ T\ R}$

On a négligé ici les effets de contre-réaction thermique sur le bolomètre qui changent les coefficients mais ne changent pas les ordres de grandeur. Un calcul exact est donné en annexe.

Globalement, un bolomètre optimisé aura toujours un bruit de l'ordre du bruit Johnson de sa résistance. Sauf dans le cas où $|\alpha|$ est très grand, il faut que le bruit de l'amplificateur soit inférieur au bruit Johnson à la température du bolomètre.

Quelques valeurs typiques du bruit Johnson sont données dans le tableau suivant:

Résistance du bolomètre	température	bruit Johnson
10 MΩ	100 mK	7,2 $nV/\sqrt{Hz}$
100 KΩ	30 mK	0,4 $nV/\sqrt{Hz}$
1 Ω	30 mK	1,2 $pV/\sqrt{Hz}$

On remarque qu'il est plus facile de mesurer un bolomètre à haute impédance. Cependant, le bruit en courant du bolomètre varie en sens opposé et, ce qui caractérise réellement les performances de bruit d'un amplificateur n'est pas le bruit en tension mais le produit du bruit en tension par le bruit en courant, ou encore la température de bruit.

En effet les bruit Johnson en tension et en courant sont donnés par:

$$S_V = \sqrt{4 K_b T R} \qquad S_I = \sqrt{\frac{4 K_b T}{R}}$$

$$\text{soit} \quad S_I S_V = 4 K_b T$$

Pour obtenir les meilleures performances, il faudra adapter l'impédance du bolomètre à l'impédance de bruit de l'amplificateur, soit en ajustant le bolomètre, soit en utilisant un transformateur.

B. Amplificateurs

1) Bruit des différents amplis utilisables

Le tableau suivant résume le bruit typique de différents type de transistors ainsi que des SQUID.

Nous avons porté pour chaque composant, la température d'utilisation, le bruit en tension à 100Hz et à 0.01 Hz, le bruit en courant, la température de bruit et la résistance optimum du bolomètre adapté. Ce tableau ne donne pas les meilleures performances atteintes mais des valeurs de bruit typique.

type d'ampli	Tutil	S_V ($V/\sqrt{Hz}$) f=100 Hz	S_V ($V/\sqrt{Hz}$) f=0.01Hz	S_I ($A/\sqrt{Hz}$)	Tbruit f=100 Hz	R
transistor bipolaire	300 K	0.3 nV	100 nV	1 pA	2000 mK	100Ω
JFet Silicium	300 K	1 nV	0.1 µV	1 fA	20 mK	1 MΩ
JFet Silicium	150 K	1 nV	0.1 µV	0,1 fA	2 mK	10 MΩ
MosFet Si	4 K	100 nV	100µV	$< 10^{-16}$	200 mK	1000 GΩ
Fet AsGa	4 K	10 nV	100µV	0.01 fA	2mK	100 MΩ
SQUID	4 K		1 fV	1 pA	20 µK	1 mΩ

2) Modulation électrique

Compte tenu de la forte remontée du bruit des amplificateurs à très basse fréquence, si on veut obtenir des bonnes performances dans ce domaine de fréquences, on va effectuer une modulation électrique à une fréquence f_{mod} où le bruit de l'amplificateur reste faible. La mesure, après détection synchrone, nous donne accès à toutes les basses fréquences avec des performances de bruit définies par les performances de l'amplificateur autour de la fréquence de modulation f_{mod}.

a) Modulation sinusoïdale.

Les bolomètres ayant un comportement fortement non linéaire, la modulation sinusoïdale va créer tous les harmoniques de la fréquence de modulation f_{mod} . Plus simplement, on comprend que, si le courant est modulé en $\sin(\omega t)$, la puissance appliquée sur le bolomètre est modulée en $\sin^2(\omega t)$ soit à la fréquence double. L'amplitude de cette modulation thermique dépendra du rapport $\frac{f_{mod}}{f_{th}}$.

Pour garder un points de fonctionnement correct du bolomètre et ne pas avoir trop de signal aux harmoniques supérieures, il faut que la fréquence de modulation soit beaucoup plus rapide que la réponse thermique du bolomètre, soit $\boxed{f_{mod} >> f_{th}}$.

Un autre inconvénient de cette modulation est que l'existence d'harmoniques importantes empèchent d'avoir un bon équilibrage si l'on utilise un circuit en pont.

b) Modulation carrée

Etant données les restrictions mentionnées ci-dessus, on comprend immédiatement l'avantage d'utiliser un signal carré pour la modulation des bolomètres. Si le signal est bien symétrique et si les transitoires sont bien raides, la puissance électrique dissipée par le bolomètre reste constante. Cela signifie que le signal de sortie sera lui même un signal carré. Le bolomètre reste ainsi tout le temps, quelque soit la fréquence de modulation, à son point de fonctionnement optimum. De plus, le signal de sortie étant carré, il sera possible, grâce à un montage en pont, d'annuler ce signal à l'aide d'une tension d'opposition.

3) Polarisation du bolomètre

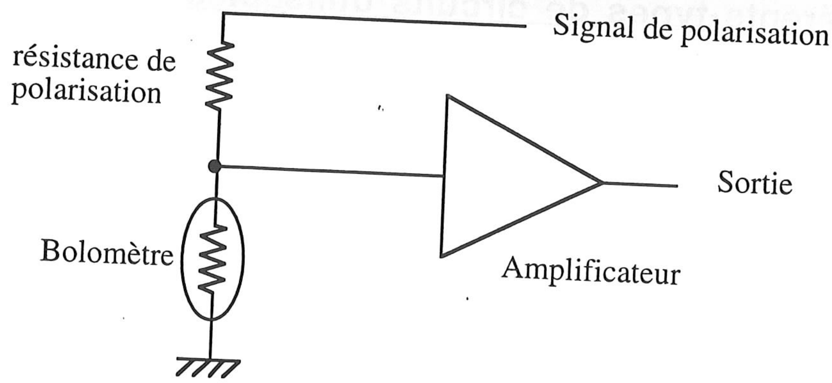
a) Polarisation par résistance

On a vu que pour ne pas être limité par le bruit du préamplificateur, il est préférable d'utiliser un bolomètre de forte impédance R. La manière la plus simple consiste à alimenter ce bolomètre à travers une résistance de plus forte valeur R_p, et de mesurer la tension aux bornes du bolomètre.

Il est clair que l'on doit avoir $R_p >> R$ pour éviter d'atténuer le signal mesuré. De plus, si la résistance de polarisation est à une température T_p, son bruit théorique sera inférieur à celui du bolomètre si l'on a:

$$\sqrt{4 K_b T_p R_p} < \sqrt{4 K_b T R} \quad \text{soit} \quad T_p R_p < T R$$

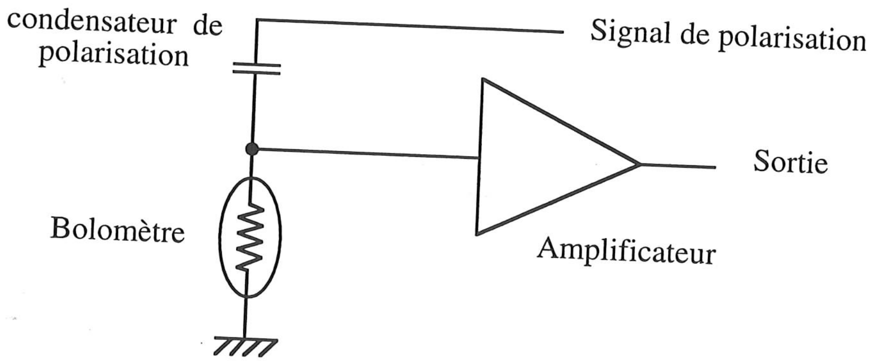
? NON



Comme il est difficile de réaliser une résistance de très forte valeur qui soit stable en température et dont le bruit soit purement Johnson, on est généralement obligé de refroidir la résistance de polarisation à la température du bolomètre. On utilise couramment une résistance de 80 MΩ, ce qui limite l'impédance maximum du bolomètre.

b) Polarisation par condensateur

Dans le cas où il y a une modulation, il est possible de remplacer la résistance de polarisation par un condensateur. Bien sûr, il faut alors déphaser le signal de modulation de $\pi/2$ dans le cas d'une modulation sinusoïdale. Dans le cas d'une modulation carrée, il faut remplacer le carré par un triangle.



Cette polarisation possède trois avantages principaux qui découlent l'un de l'autre:

- L'absence de dissipation supprime le bruit généré par la polarisation.
- Il est alors possible de placer le condensateur à plus haute température, par exemple dans le préamplificateur.
- Il ne faut que deux fils entre le bolomètre et le préamplificateur, ce qui peut être important lorsque l'on considère une matrice comprenant 50 bolomètres.

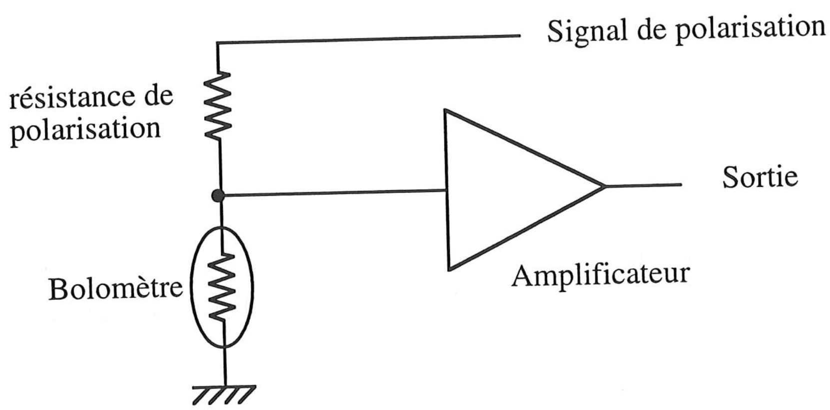
L'inconvénient de cette technique est qu'il faut réaliser un intégrateur pour déphaser le signal (ou générer un triangle). La stabilité du système dépend alors du condensateur de cet intégrateur qui doit être très stable en température et malheureusement, les condensateurs sont généralement moins stables que les résistances (typiquement 15 ppm / °).

C. Différents types de circuits utilisables

1) Mesure à courant constant

Pour tous ces shémas de mesure, le signal de polarisation peut être une tension continue ou une modulation sinusoïdale ou carrée. dans le cas d'une modulation, la polarisation peut se faire soit avec une résistance, soit avec un condensateur.

a) Shéma classique



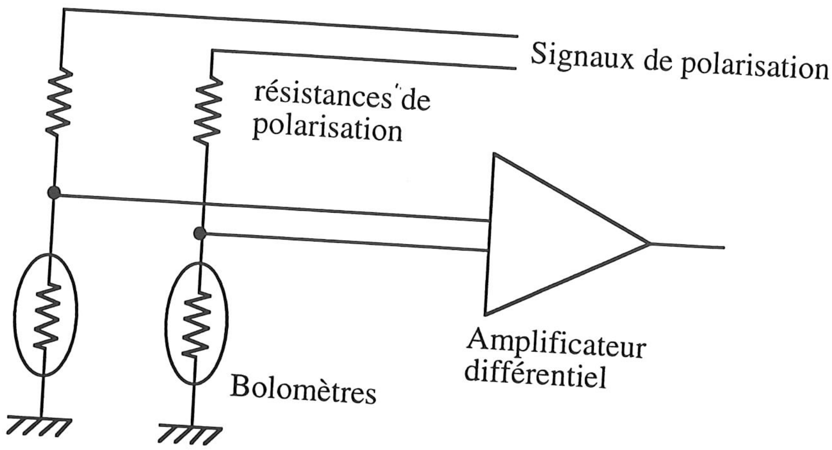
Avantages:

- C'est le système le plus simple.

Inconvénients:

- Si l'on module le bolomètre, le système nécessite une grande dynamique de l'amplificateur et de la détection synchrone.
- De même, il faut une grande stabilité du gain de l'amplificateur et de la détection synchrone.
- Les fils de mesure transportent une tension importante et seront sensibles à la microphonie.
- Le signal à l'entrée de l'amplificateur est important et il sera difficile de traiter correctement les transitoires d'une modulation carrée.
- Du fait du grand signal à la sortie de l'ampli et de la détection synchrone, il est difficile de mesurer ce signal avec la résolution nécessaire et généralement, on est obligé de couper la partie continue du signal par un filtre passe haut. La puissance totale reçue par le bolomètre n'est donc pas directement connue.

b) Mesure différentielle sur 2 bolomètres



Les signaux de polarisation peuvent être une tension continue ou une tension sinusoïdale ou carrée.

<u>Avantages</u>

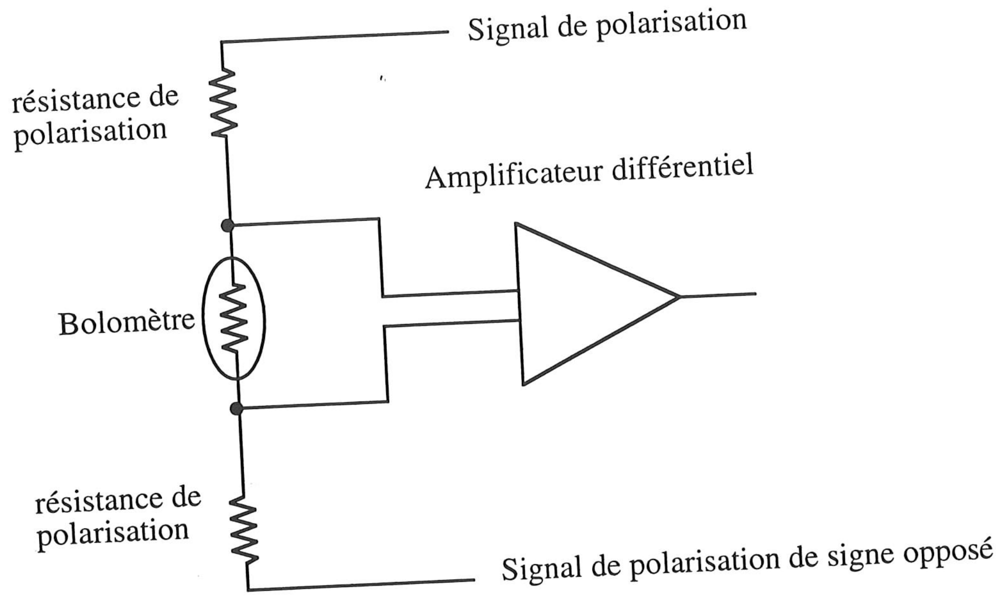
Permet de ne mesurer qu'un petit signal de différence: l'amplificateur et la détection synchrone n'ont plus besoin d'une grande dynamique et d'une grande stabilité de gain.

<u>Inconvénients</u>

- Les fils de mesure transportent une tension importante et seront sensibles à la microphonie.
- Le signal à l'entrée de l'ampli est important et il faudra faire attention à la réponse en mode commun pour traiter les transitoires d'une modulation carrée.
- On ne peut travailler qu'avec deux bolomètres de caractéristiques identiques, très difficiles à apairer. On peut remplacer un des deux bolomètres par une résistance, mais il est alors plus délicat d'équilibrer le système.
- La puissance reçue par chaque bolomètre n'est pas connue.

Ce système a été utilisé avec succès par le groupe de CALTECH sur la manip SUZIE pour détecter l'effet Sunaiev Zeldovich. Ils ont utilisé une modulation carrée et regarde la source se déplacer sur le ciel, télescope immobile.

c) Mesure différentielle sur un bolomètre

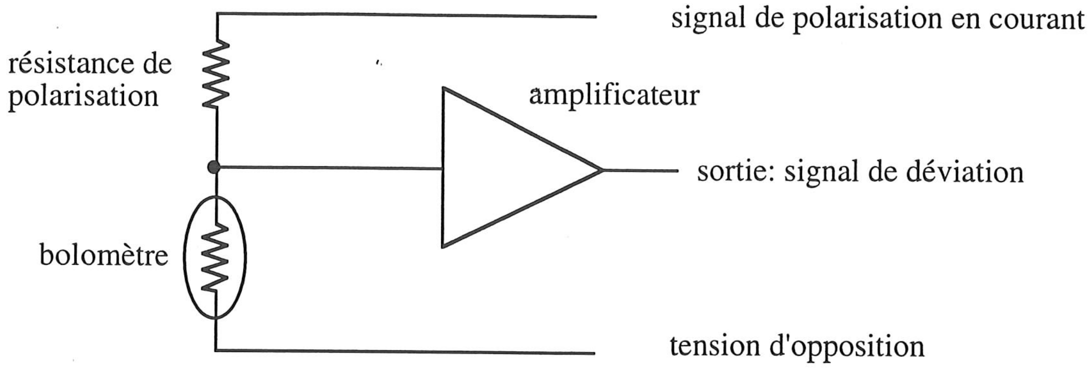


Ce système est utilisé par le groupe de CALTECH sur les manips SUZIE et Boomerang, avec une modulation sinusoïdale.

Avantages:
Permet d'utiliser un amplificateur différentiel et d'être moins sensible aux bruits parasites.

Inconvénients:
- L'amplificateur et la détection synchrone ont besoin d'une grande dynamique et d'une grande stabilité de gain.
- Les fils de mesure transportent une tension importante et seront sensibles à la microphonie.
- Le signal à l'entrée de l'ampli est important et il est difficile de traiter les transitoires d'une modulation carrée.
- Du fait du grand signal à la sortie de l'ampli et de la détection synchrone, il est difficile de mesurer ce signal avec la résolution nécessaire et généralement, on est obligé de couper la partie continue du signal par un filtre passe haut. La puissance totale reçue par le bolomètre n'est donc pas directement connue.

d) mesure en pont



La tension d'opposition est ajustée pour obtenir un signal presque nul à l'entrée de l'amplificateur. Ce dernier ne mesure donc que les variations autour d'un point de fonctionnement prédéfini.

<u>Avantages:</u>

- Permet de ne mesurer qu'un petit signal: l'amplificateur et la détection synchrone n'ont plus besoin d'une grande dynamique et d'une grande stabilité de gain.
- Les fils de mesure sont au potentiel de la masse et ne transportent qu'un petit signal. Ils seront donc beaucoup moins sensibles à la microphonie due à la modulation des capacités parasites.
- Le signal de modulation n'étant pas amplifié, il sera possible d'utiliser des signaux carrés car il n'y aura pas de problème avec les transitoires rapides.
- La tension d'opposition étant connue, ce système permet une mesure de la puissance totale reçue par le bolomètre. Un contrôle de son point de fonctionnement est donc possible par le tracé des caractéristiques V(I) durant les observations.

<u>Inconvénients:</u>

- Dans cette version du pont, l'amplificateur n'est pas différentiel, ce qui peut augmenter la sensibilité aux signaux parasites. Une version plus complexe de mesure en pont permettrait d'utiliser un amplificateur différentiel.

Ce système est utilisé par nous-même sur la manip DIABOLO avec une modulation carrée et une polarisation par condensateur.

2) Mesure avec bouclage sur le bolomètre

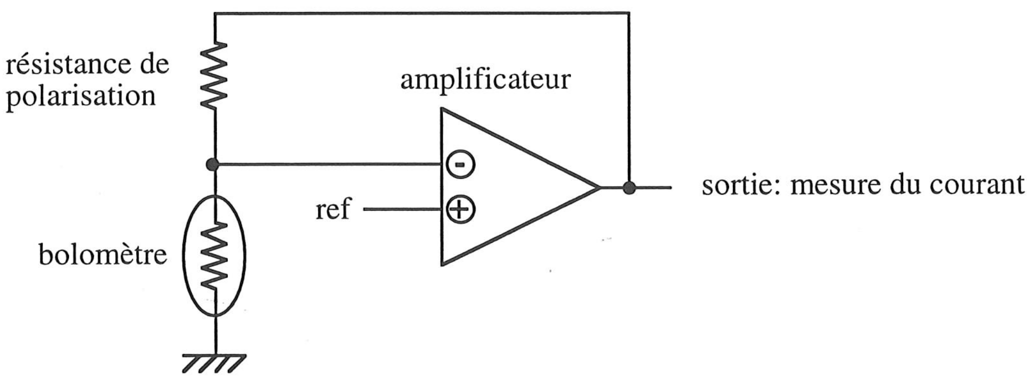
a) Effet du bouclage électrique sur la mesure d'un bolomètre

Nous allons discuter ici, l'effet de la réinjection du signal de sortie de l'amplificateur sur le bolomètre. On supposera pour simplifier, que le gain de l'amplificateur est très grand et que, en conséquences, le signal en entrée de l'amplificateur reste nul.

On peut montrer que les performances de bruit restent inchangées. Par contre, le bouclage aura un grand effet sur les constantes de temps du système. Le grand intérêt de ce bouclage est de rendre la réponse électrique très rapide, même en présence d'une grande capacité parasite sur la ligne entre le bolomètre et l'amplificateur (la tension reste constante sur cette ligne). Cependant, il faut remarquer que, pour les hautes fréquences qui, en l'absence de bouclage, ne seraient pas transmises, si la réponse de l'amplificateur augmente, son bruit augmente de la même façon. Le gain effectif sur la constante de temps est donc en fait, limité par le rapport entre le bruit du bolomètre et celui de l'amplificateur.

Le deuxième effet du bouclage est de changer la contre-réaction thermique sur le bolomètre lui-même qui pourrait être asservi en courant constant, tension constante ou résistance constante. Cela changera sa constante de temps thermique.

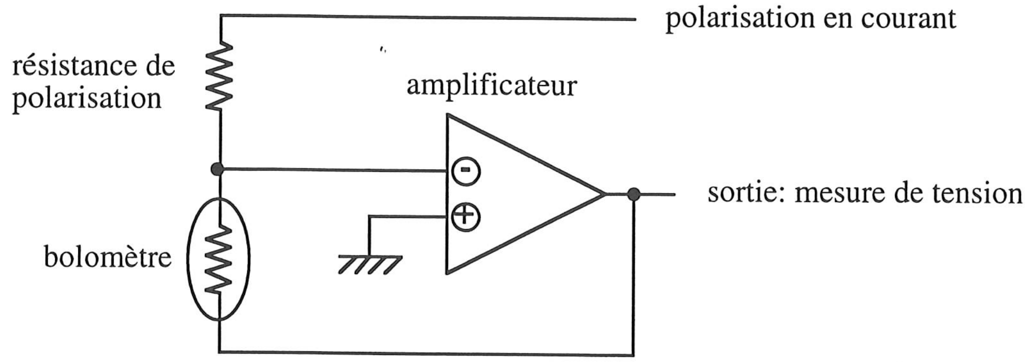
b) Bouclage à tension constante: ampli de courant



Si le gain de l'amplificateur est grand, le courant est ajusté pour maintenir la tension constante sur le bolomètre, égale à la tension de référence (ref). C'est un montage en amplificateur de courant.

Pour un bolomètre semiconducteur avec $\alpha <<0$, la contre-réaction thermique est positive. cela conduit à une augmentation du signal de sortie mais, au prix d'une dégradation de la constante de temps thermique du bolomètre (τ_{th} augmente). Si la réponse du bolomètre est trop forte ($\alpha << -1$), la courbes V(I) n'est plus monotone car V peut diminuer lorsque I augmente. Le système peut alors avoir deux points de fonctionnement stables. L'intérêt est d'accelerer la réponse électrique.

c) Bouclage à courant constant.

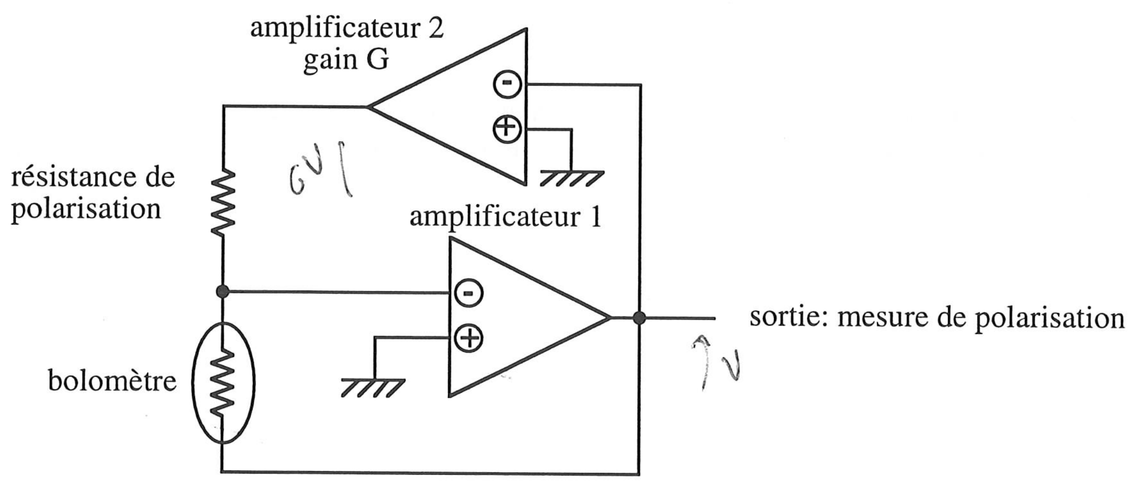


Si le gain de l'amplificateur est grand, la tension d'opposition est ajustée pour maintenir le courant constant dans le bolomètre, égal au courant de polarisation.

Pour un bolomètre semiconducteur avec $\alpha << 0$, la contre-réaction thermique est négative, comme dans le montage simple sans bouclage. Cela conduit à une diminution de la constante de temps thermique du bolomètre (τ_{th} diminue) qui devient plus rapide.

L'interêt est d'accelerer la réponse électrique comme dans le cas de l'amplificateur de courant, mais sans en avoir les inconvénients.

d) Bouclage à impédance constante.



Comme précédemment, le gain de l'amplificateur est très grand. Le gain G de l'amplificateur 2 fixe le rapport courant / tension sur le bolomètre et donc sa résistance R.

Si V est la tension de sortie, le courant est donné par $I = G\ V / R_p$ et la résistance du bolomètre est $R = R_p / G$. Le système n'est stable que pour un bolomètre avec $\alpha << 0$. C'est en fait, un asservissement de la température à une valeur constante correspondant à la valeur de la résistance R du bolomètre. La puissance électrique d'excitation s'ajustera pour maintenir cette température constante. Le système nous donne donc directement une mesure absolue de la puissance totale de rayonnement absorbée par le bolomètre, sans nécessiter de calibration. de plus, ce système permet de rendre le bolomètre beaucoup plus rapide, la constante de temps thermque étant divisée par le gain de boucle du système. La limitation à cette rapidité proviendra des problèmes de stabilité de ce système bouclé.

3) Conclusion

Globalement, on voit qu'il est possible de mesurer un bolomètre sans être dominé par le bruit de l'amplificateur. Le plus difficile est d'obtenir une bonne stabilité à très basse fréquence. Enfin, les problèmes de constante de temps peuvent amener à utiliser un bouclage sur le bolomètre.

Compte tenu des spécifités de la mesure à effectuer, on peut choisir indépendamment les différentes options de mesure suivantes:

- Mesure continue ou modulation.
- Modulation sinusoïdale ou carrée.
- Polarisation résistive ou capacitive.
- Montage avec mesure totale ou mesure de déviations (en pont).
- Bouclage éventuel sur le bolomètre.

Néamoins, certaines combinaisons sont plus intéressantes. Ainsi, une modulation carrée s'accomode mieux d'une mesure en pont, tandis qu'une modulation sinusoïdale demande des fréquences de modulation plus élevées.

Nous avons construit un photomètre utilisant des bolomètres travaillant dans deux bandes de longueur d'onde, λ=1.2mm et λ=2mm. Ce photomètre appellé DIABOLO, a été utilisé sur différents télescopes au sol, soit avec un secondaire vibrant permettant une modulation vers 2 Hz (télescope Italien MITO et télescope de 30m de l'IRAM à Pico Veleta), soit sans modulation et en balayant directement le ciel avec le télescope (télescope de POM2 au Plateau de Bure).

Dans ces conditions, pour garantir les performances à très basse fréquence et permettre une mesure de puissance totale avec une grande dynamique, nous avons choisi un montage à modulation carrée avec polarisation capacitive et un montage en pont. Suite à des discussions avec d'autres équipes, nous étudions actuellement l'interêt d'un bouclage du système en tension. Nous avons réalisé un modulateur avec un circuit en pont et un bouclage uniquement pour le signal de déséquilibre. Le système est en cours de test.

Le choix de ces différentes techniques se pose aujourd'hui pour le satellite COBRAS/SAMBA de l'agence spatiale européenne, dédié à la mesure du rayonnement fossile. La version nominale actuellement est une électronique du même type que DIABOLO, mais une reflexion est en cours pour estimer l'impact d'une mesure différentielle sur la microphonie. Le système en pont semble plus complexe à gérer mais son grand interêt est de permettre un contrôle et une optimisation du point de fonctionnement des bolomètres durant toute la mission.

Annexe: Nep d'un bolomètre idéal

1) Notations.

(1) $$\boxed{k\,T^{\beta} = k\,T_0^{\beta} + P + P_{electrique}}$$

T	est la température du bolometre
T_0	est la température du cryostat
k	représente la fuite thermique (avec exposant β)
P	est la puissance rayonnée
$P_{electrique}$ $= R\,I^2$	est la puissance electrique sur le bolometre

On pose $\mathbf{P_1} = k\,T_0^{\beta} + P$ soit $\boxed{k\,T^{\beta} = P_1 + P_{electrique}}$

$\mathbf{y} = \dfrac{k\,T_0^{\beta}}{P}$ soit $P_1 = P\,(1+y)$

et $\mathbf{x} = \dfrac{P_{electrique}}{P_1}$ soit $k\,T^{\beta} = P_1\,(1+x)$

La sensibilité du thermomètre est donnée par $\alpha = -\dfrac{T}{R}\,\dfrac{dR}{dT}$ OK NTD, NbSi $\alpha < 0$.

Les paramètres x,y,α,β sont sans dimension et permettent de calculer la Nep.

Leurs signification sont :

α	sensibilité du thermomètre	2 à 6
β	puissance de variation de la fuite thermique	2 ou 4
x	rapport entre la puissance electrique et la puissance totale	
y	importance de la température du cryostat par rapport au rayonnement	

Pour calculer la Nep, on a besoin de la conduction thermique $\mathbf{g} = \dfrac{dP}{dT}$

par dérivation de (1) , on obtient : $\beta\,\dfrac{dT}{T} = \dfrac{dP + I^2\,dR}{P_1\,(1+x)}$ OK si I=cst

En utilisant $dR = -\alpha\,R\,\dfrac{dT}{T}$ on obtient $I^2\,dR = -\alpha\,R\,I^2\,\dfrac{dT}{T} = -\alpha\,P_1\,x\,\dfrac{dT}{T}$

$$\left(\beta + \alpha\,\frac{x}{1+x}\right)\frac{dT}{T} = \frac{dP}{P_1\,(1+x)}$$

$$\mathbf{g} = \frac{dP}{dT} = \frac{P_1}{T}\,(\beta\,(1+x) + \alpha\,x)$$

(2) $$\boxed{\mathbf{g} = \frac{P_1}{T}\,(\beta + x\,(\alpha + \beta))}$$

(le terme α x est du à la contre réaction thermique du bolometre)

2) Calcul du bruit.

a) Bruit thermodynamique.

Les fluctuations thermodynamiques sont $\sqrt{<T^2>} = \sqrt{\frac{K_bT^2}{C}}$

réparties dans une bande de fréquence limitée par le temps $\tau_{th} = \frac{C}{g}$

$B = \frac{1}{4\tau_{th}}$ (Bande p!

En remplaçant g par sa valeur, on obtient $\tau_{th} = \dfrac{C\ T}{P_1\ (\beta + x\ (\alpha + \beta))}$

Le bruit blanc en température correspondant a une amplitude donnée par

$$S_T = \sqrt{\frac{K_bT^2}{C} 4\ \tau_{th}} = \sqrt{\frac{4\ K_b\ T^3}{P_1\ (\beta + x\ (\alpha + \beta))}}$$

Le bruit blanc sur la puissance (nep) est donné par $S_P = g\ S_T$:

(3) $$\boxed{S_{Pthermo} = \sqrt{\beta + x\ (\alpha + \beta)}\ \sqrt{K_bT\ P_1}}$$

Pour x petit, on a donc $S_{Pthermo} \sim \sqrt{\beta}\ \sqrt{4\ K_bT\ P_1}$

b) Bruit Johnson sur la résistance du bolometre.

C'est un bruit blanc en tension d'amplitude spectrale $S_V = \sqrt{4K_bTR}$

Le bruit induit sur la température est donné par $\frac{S_T}{T} = -\frac{1}{\alpha}\frac{S_V}{V}$

on a alors $S_T = -\frac{T}{\alpha}\sqrt{\frac{4K_bT}{P_{electrique}}} = -\frac{T}{\alpha}\sqrt{\frac{4K_bT}{x\ P_1}}$

Le bruit induit sur la mesure de puissance est donné par $S_P = g\ S_T$

(4) $$\boxed{S_{PJohnson1} = \frac{\beta + x\ (\alpha + \beta)}{\alpha\sqrt{x}}\ \sqrt{4\ K_bT\ P_1}}$$

Il faut soustraire le bruit en puissance du à la contre réaction thermique du bolomètre

(5) $$\boxed{S_{PJohnson2} = P_{electrique}\frac{S(V)}{V} = \sqrt{x}\ \sqrt{4\ K_bT\ P_1}}$$

On obtient alors le bruit Johnson total

(6) $$\boxed{S_{PJohnson} = \frac{\beta\ (1 + x)}{\alpha\sqrt{x}}\ \sqrt{4\ K_bT\ P_1}}$$

c) Bruit total.

En ajoutant le carré des bruits, on obtient

$$S_P = \sqrt{\beta + x\ (\alpha + \beta) + \frac{\beta^2\ (1 + x)^2}{\alpha^2\ x}}\ \sqrt{4\ K_bT\ P_1}$$

(6) $$\boxed{S_P = \sqrt{(\alpha+\beta+\frac{\beta^2}{\alpha^2})\ x + (\beta+2\frac{\beta^2}{\alpha^2}) + \frac{\beta^2}{\alpha^2}\frac{1}{x}}\ \sqrt{4\ K_bT\ P_1}}$$

3) Optimisation.

a) Puissance electrique optimale.

il faut minimiser cette expression en fonction de x

Attention: P_1 ne depend pas de x mais pour T_0 fixe, T en dépend par

$$k\,T^{\beta} = P_1\,(1+x) \qquad \text{ou} \quad T = \sqrt[\beta]{\frac{P_1\,(1+x)}{k}}$$

Il faut donc minimiser

$$f(x) = \sqrt[\beta]{1+x}\,\left\{ (\alpha+\beta+\frac{\beta^2}{\alpha^2})\,x + (\beta+2\frac{\beta^2}{\alpha^2}) + \frac{\beta^2}{\alpha^2}\,\frac{1}{x} \right\}$$

comme $\beta >= 2$, pour x petit, les variations de $\sqrt[\beta]{1+x}$ sont negligeables

Le minimum sera donc obtenu lorsque les termes en x et en 1/x sont égaux:

$$(\alpha+\beta+\frac{\beta^2}{\alpha^2})\,x = \frac{\beta^2}{\alpha^2}\,\frac{1}{x} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{x = \frac{\beta}{\alpha\,\sqrt{\alpha+\beta}}}$$

ok si $\frac{\beta^2}{\alpha^2\beta} = \frac{\beta}{\alpha^2} \ll 1$

Dans ces conditions, les bruits sont donnés par :

$$S_{P\,thermo} = \sqrt{\beta}\,\sqrt{1+\frac{\sqrt{\alpha+\beta}}{\alpha}}\,\sqrt{4\,K_b T\,P_1}$$

ok

$$S_{P\,Johnson} = \sqrt{\frac{\beta^2\,(\beta^2 + 2\,\alpha\beta\,\sqrt{\alpha+\beta} + \alpha^2\,(\alpha+\beta)\,)}{\alpha^3\,\beta\,\sqrt{\alpha+\beta}}}\,\sqrt{4\,K_b T\,P_1}$$

si α est grand (même si β est du même ordre de grandeur que α), alors dans le bruit Johnson, seul le dernier terme est important et on a :

$$S_{P\,Johnson} = \sqrt{\beta}\,\sqrt{\frac{\sqrt{\alpha+\beta}}{\alpha}}\,\sqrt{4\,K_b T\,P_1}$$

le bruit total est alors :

$$\boxed{S_P = \sqrt{\beta}\,\sqrt{1+2\,\frac{\sqrt{\alpha+\beta}}{\alpha}}\,\sqrt{4\,K_b T\,P_1}}$$

L'importance du bruit Johnson dans le bruit total est donné par:

$$\frac{S_{P\,Johnson}}{S_{P\,total}} = \sqrt{\frac{u}{1+2\,u}} \qquad \text{avec} \quad u = \frac{\sqrt{\alpha+\beta}}{\alpha}$$

b) Fuite thermique optimale.

Il nous faut minimiser cette expression en fonction de y sachant que P_1 et T varient avec y α et β et x étant fixé.

Il suffit donc de minimiser le produit $P_1 T$ avec T_0 et P constant

On a $P_1 = P\,(1+y)$ et $k\,T^{\beta} = P_1\,(1+x)$ avec $k = y\,\frac{T_0^{\beta}}{P}$

Soit la fonction à minimiser $(1+y)\,\sqrt[\beta]{\frac{1+y}{y}}$

Le problème est équivalent à minimiser la fonction $f(y) = \frac{(1+y)^{\beta+1}}{y}$

par dérivation, on obtient l'équation

$$(\beta+1)(1+y)^{\beta} y = (1+y)^{\beta+1} \quad \text{-->} \quad y(\beta+1) = 1+y \quad \text{soit} \quad \boxed{y = \frac{1}{\beta}}$$

On en déduit la température du bolomètre:

$$k T^{\beta} = P_1 (1+x) = P(1+x)(1+y) \quad \text{et} \quad k T_0^{\beta} = y P$$

$$\text{soit } \frac{T}{T_0} = \sqrt[\beta]{\frac{(1+x)(1+y)}{y}} = \sqrt[\beta]{(1+x)(1+\beta)} \quad \text{avec } x = \frac{\beta}{\alpha\sqrt{\alpha+\beta}}$$

4) Bruit total après optimisation.

a) Expression du bruit (NEP).

Pour exprimer la Nep S_P en fonction de P et T_0 on utilise :

$$\frac{P_1 T}{P T_0} = \frac{1+\beta}{\beta} \frac{T}{T_0}$$

Le bruit optimisé d'un bolomètre idéal est donc donné par

$$\boxed{S_P = \sqrt{A}\sqrt{4 K_b T_0 P}}$$

$$A = \frac{T}{T_0}(1+\beta)\left(1+2\frac{\sqrt{\alpha+\beta}}{\alpha}\right) \qquad \frac{T}{T_0} = \sqrt[\beta]{(1+x)(1+\beta)} \qquad x = \frac{\beta}{\alpha\sqrt{\alpha+\beta}}$$

b) Valeur numériques de bruit.

Le tableau suivant donne des résultats numériques en fonction de α et β.

Les valeurs de Sp (Nep) sont données pour un cryostat à 100mK et une puissance de rayonnement de 10^{-12} W. Pour d'autres valeur de température ou de puissance rayonnée, la Nep varie comme $\sqrt{PT}$.

sensibilité

α	β	x	T/T_0	A	S_P (Nep)	$S_{Pjohnson}/S_{Ptotal}$
1	2	1,155	2,54	34	$1{,}37\ 10^{-17}$	62%
2	2	2,12	2,12	19,1	$1{,}03\ 10^{-17}$	58%
4	2	1,9	1,9	12,7	$0{,}84\ 10^{-17}$	52%
6	2	1,83	1,83	10,7	$0{,}77\ 10^{-17}$	49%
10	2	0,058	1,78	9	$0{,}70\ 10^{-17}$	45%
1	4	1,79	1,93	53	$1{,}71\ 10^{-17}$	64%
2	4	0,81	1,74	30	$1{,}29\ 10^{-17}$	59%
4	4	0,35	1,61	19,5	$1{,}04\ 10^{-17}$	54%
6	4	0,21	1,57	16,1	$0{,}94\ 10^{-17}$	50%
10	4	0,10	1,53	13,4	$0{,}86\ 10^{-17}$	46%

Les résultats dépendent peu des valeurs de α et β pour peu que α soit plus grand que 2.

c) Comparaison avec le bruit de photon.

Plus généralement, si l'on compte des photons d'energie ε
La puissance est $P = N\,\varepsilon$ où N est le nombre de photons par seconde
Le bruit de photon en energie est $Sp = \sqrt{N}\,\varepsilon$
Pour que la Nep soit inférieure au bruit de photon, il faut que:

$$Sp = \sqrt{A}\sqrt{4\,K_b T_0\,N\,\varepsilon} < Sp = \sqrt{N}\,\varepsilon$$

soit $K_b T_0 < \frac{\varepsilon}{4\,A}$ et, en prenant une valeur typique A=20:

$$\boxed{K_b T_0 < \frac{\varepsilon}{80}}$$

Pour des photons de 1 mm, on a $\frac{\varepsilon}{K_b} = \frac{h\,c}{\lambda K_b} = 14\text{ K}$ et $\boxed{T_0 < 175\text{ mK}}$

Pour des photons de 2 mm, on a $\frac{\varepsilon}{K_b} = \frac{h\,c}{\lambda K_b} = 7\text{ K}$ et $\boxed{T_0 < 88\text{ mK}}$

5) Capacité calorifique / constante de temps.

On a : $\tau = \frac{C\,T}{P_1\,(\beta + x\,(\alpha + \beta))}$ avec $P_1 = P\,(1+y)$ et $y = \frac{1}{\beta}$

$$\boxed{\tau = B\,\frac{C\,T}{P} \quad \text{avec} \quad B = \frac{\beta}{(1+\beta)(\beta+x(\alpha+\beta))} = \frac{\alpha}{(1+\beta)(\alpha+\sqrt{\alpha+\beta})}}$$

Pour des valeurs classiques de α et β , B varie de 0,1 à 0,2
La capacité calorifique ne joue que sur la rapidité du bolomètre et non sur la sensibilité.
dans les mêmes conditions, si T_0=100mK et $P = 10^{-12}$W

on a : $\tau = B\,\frac{C\,T}{P}$ soit $C = \frac{\tau\,P}{B\,T}$

Pour avoit τ = 10ms, il faut $C = 8\;10^{-13}$ J/K