

4^e Ecole d'Automne

Détection de rayonnements à très basse température

Balaruc les Bains du 14 au 20 novembre 1999

Physique et techniques des basses températures
détecteurs cryogéniques, acquisition et traitement des signaux.

**« INTRODUCTION À LA
SUPRACONDUCTIVITÉ »**

Marco APRILI

PLAN

1. Introduction
2. Les idées
 - 2.A. Supraconductivité : quelle différence avec un conducteur parfait ?
 - 2.B. Condensation : un supraconducteur est un fluide quantique.
 - 2.C. Pourquoi les électrons condensent dans un état quantique macroscopique ?
 - 2.D. Echelles d'énergie et longueurs caractéristique.
3. Les Tests
 - 3.A. Les excitations élémentaires : la spectroscopie tunnel.
 - 3.B. La cohérence de phase : l'effet Josephson.
4. Les systèmes réels
 - 4.A. Les collisions élastiques
 - 4.B. Comment réduire la T_c : le dépairage
 - 4.C. Les effets de taille finie
5. Chaleur spécifique et transport de la chaleur
 - 5.A. La chaleur spécifique
 - 5.B. Le transport de la chaleur
6. Annexes

1. Introduction

Peut-on considérer un supraconducteur comme étant uniquement un conducteur parfait ? C'est en essayant de répondre à cette question que je présenterai l'originalité de la supraconductivité par rapport à un système caractérisé uniquement par une résistance électrique nulle. En effet, le comportement macroscopique des supraconducteurs qui va donc bien au delà de ce simple effet sur le transport électrique est intimement lié à l'origine quantique de l'état supraconducteur. Il existe une théorie microscopique, la théorie BCS qui décrit la condensation des électrons dans cet état quantique. Pour les supraconducteurs conventionnels tels que les métaux par exemple, la théorie BCS rend compte d'une façon remarquable des observations expérimentales. On pourrait donc penser que la supraconductivité est un sujet purement académique, étudié et bien compris. La découverte récente des oxydes supraconducteurs (cuprates, ruthénates...) et, quelques années avant des systèmes à fermions lourds a montré que cela n'était pas le cas. Plusieurs expériences ont sérieusement mis en cause l'origine conventionnelle de la supraconductivité dans ces matériaux en évoquant des mécanismes nouveaux. La compréhension des propriétés électroniques de ces composés reste un enjeu de la physique de la matière condensée actuelle. Ici on se limitera à la supraconductivité des métaux ordinaires.

2. Les idées

2.A. Supraconductivité : quelle différence avec un conducteur parfait ?

En Fig.1 on présente la variation de la résistance du Hg en fonction de la température. On remarque que la résistivité devient nulle à une température inférieure à environ 4.2 K . L'allure indique une transition de phase vers un état caractérisé par une conduction parfaite. Dans un métal la résistivité électrique, ρ , est limitée par les collisions des porteurs avec des impuretés ou des excitations du système.

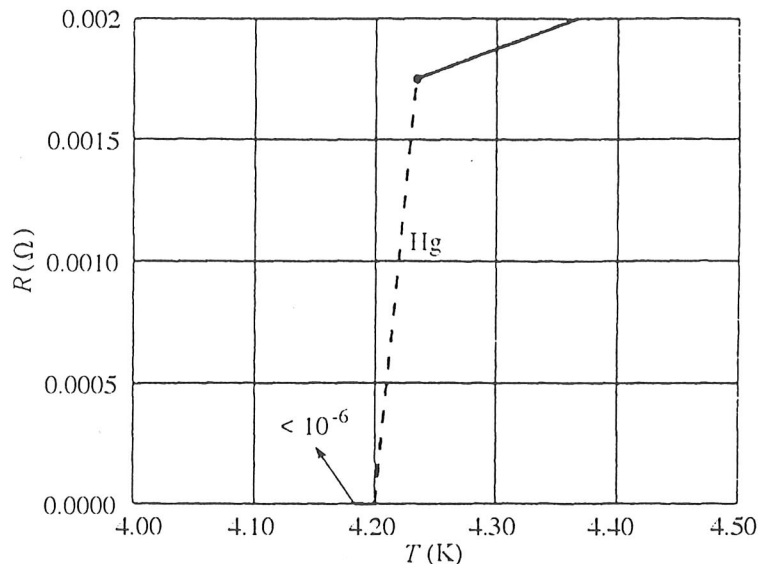


Fig.1

The original R vs T curve of Kamerlingh Onnes showing the superconducting transition in mercury. (After Kamerlingh-Onnes (1911).)

Un modèle simple, le model de Drude [1], permet de relier la résistivité avec la densité des porteurs, n , et le temps moyen entre deux collisions, τ , communément appelé temps de relaxation :

$$\rho = \frac{m}{n e^2 \tau}$$

Le produit de la vitesse des électrons, v_F , par le temps de relaxation donne la distance moyenne, l , parcourue par un électron entre deux collisions ou libre parcours moyen. On pourrait donc imaginer que la transition de phase montrée en Fig.1 correspond à la transition d'un temps de relaxation fini à un temps infini. On verra par la suite que τ ne change pas à la transition. Même si cette hypothèse est fautive, elle ne peut pas être écartée « a priori ». La conduction parfaite, que l'on peut exprimer d'une façon formelle :

$$\frac{\partial \Lambda \mathbf{J}}{\partial t} = \mathbf{E} \quad \text{où} \quad \Lambda = \frac{m}{n_s e^2} \quad (1)$$

est un résultat expérimental incontournable. \mathbf{J} est la densité de courant, \mathbf{E} le champ électrique et n_s la densité de « supra-porteurs ». Un autre phénomène se manifeste à $T < T_c$: l'effet Meissner. Puisque ce phénomène ne peut pas être expliqué par une conductivité parfaite, la tentation de rechercher l'origine de la supraconductivité dans un temps de relaxation infini tombe. Qu'est-ce l'effet Meissner ? Si on applique un champ magnétique suffisamment faible à une température supérieure à T_c et on refroidit le système, à $T < T_c$ le flux magnétique est expulsé du matériau supraconducteur. Cela est illustré en Fig.2. Ce diamagnétisme parfait peut être résumé par une relation équivalente à celle utilisée précédemment pour décrire la conduction parfaite :

$$\mathbf{B} = -c \Lambda \nabla \wedge \mathbf{J}_s \quad (2)$$

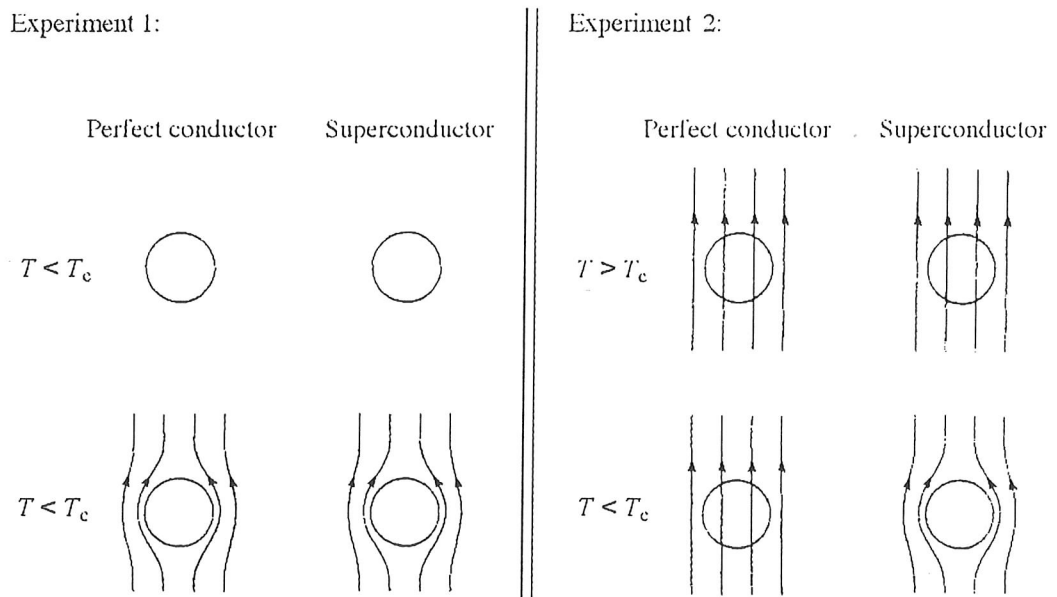


Fig.2

Hypothetical experiments showing the difference between a superconductor and a perfect conductor. Experiment 1: sample cooled in zero magnetic field after which a field is applied; experiment 2: sample cooled in applied magnetic field.

En fait, le champ magnétique pénètre sur une longueur caractéristique, $\lambda_L = \sqrt{(\Lambda c^2 / 4\pi)}$, dite longueur de pénétration de London (donner la formule) La décroissance du champ en fonction de la distance du bord du supraconducteur est exponentielle. Pour des supraconducteurs conventionnels λ_L varie entre 100 et 1000 Å. L'expulsion du flux magnétique est un effet macroscopique dû à la réponse coopérative du supraconducteur à un champ magnétique externe. Cela nous suggère qu'à la température critique le système transite vers un état où les électrons sont fortement corrélés.

2.B. Condensation : un supraconducteur est un fluide quantique.

La cause de ces corrélations est la condensation des électrons du système dans un état quantique macroscopique. En effet, en 1934 F. London remarqua que les équations (1) et (2) qui décrivent la conduction et le diamagnétisme parfaits, ont une origine quantique. Dans l'hypothèse que fonction d'onde macroscopique ψ du supraconducteur est rigide, on peut écrire :

$$\psi = e^{i\phi} \psi_0$$

où ϕ est la phase et ψ_0 l'amplitude. En utilisant le vocabulaire des transitions de phase on peut aussi appeler ψ paramètre d'ordre supraconducteur et relier son module carré à la densité d'électrons corrélés n_s . En termes quantiques cela définit la probabilité du système d'être "plus" au "moins" supraconducteur, où plus simplement le nombre d'électrons corrélés par rapport au nombre total. En réponse à une perturbation telle que un champ électrique ou magnétique ces électrons se déplaceront avec la même vitesse moyenne. On peut donc écrire que la densité du courant est $J_s = n_s e \langle v \rangle$. En mécanique l'opérateur impulsion p , est égal à $mv + eA/c$, où A est le potentiel vecteur (le potentiel vecteur est relié au champ magnétique par la relation $H = \nabla \wedge A$). D'où, on peut facilement déduire $J_s = n_s e / m (p - eA/c)$. Mais l'impulsion est proportionnelle au gradient de la phase de la fonction d'onde ($p = \hbar \nabla \phi$) et l'expression pour le courant devient :

$$J = -\frac{n_s e^2}{cm} A = -\frac{A}{\Lambda c} \quad (3)$$

Puisque cette relation contient les équations de London, l'origine quantique la supraconductivité est prouvée. Un supraconducteur est le résultat d'une condensation vers un état cohérent caractérisé par une phase constante, mais arbitraire. Les mêmes considérations sont valables pour un fluide quantique non-électronique, par exemple l'³He, à condition de remplacer la résistance électrique par la viscosité. La superfluidité est donc un concept indépendant de l'origine microscopique du phénomène. En raison de cette généralité des termes propres aux systèmes superfluides sont utilisés en supraconductivité. La densité d'électrons corrélés n_s , est communément appelée densité superfluide, le courant J_s supercourant...

La question est maintenant : pourquoi le système présente un comportement quantique à $T < T_c$? Par simplicité, on essaiera de répondre à cette question en considérant uniquement un système électronique. En fait, même si cela pourrait paraître un mauvais point de départ vu la généralité de l'effet, il a été montré que les résultats obtenus pour les supraconducteurs peuvent être généralisés à d'autres superfluides.

2.C. Pourquoi les électrons condensent dans un état quantique macroscopique ?

On peut essayer de répondre à cette question en étudiant l'origine microscopique de la supraconductivité conventionnelle. Le premier pas est de réaliser que un supraconducteur est formé de paires d'électrons, les paires de Cooper. En effet, en présence d'une interaction attractive, V , même faible, l'énergie de deux électrons au niveau de Fermi est plus faible que la somme de leurs énergies cinétiques. Ce résultat surprenant, normalement un état lié entre deux corps est formé uniquement pour des valeurs de l'interaction attractive supérieures à une valeur seuil, est une conséquence de la distribution statistique des électrons, la distribution de Fermi-Dirac. Pour minimiser l'énergie cinétique associée au mouvement du centre de masse de la paire (théorème de Bloch), les deux électrons ont un vecteur d'onde opposé. Et pour maximiser l'effet de l'interaction attractive, ils ont le spin opposé car l'état singulet permet de réduire la distance entre électrons. Dans l'hypothèse que l'interaction est faible, on peut montrer que la formation d'une paire permet de réduire l'énergie des électrons de :

$$E - E_F = -2\hbar\omega_c e^{-2/N(E_F)V}$$

N la densité d'états au niveau de Fermi. On dit alors que la mer de Fermi qui représente l'ensemble des électrons de conduction, est instable à la formation d'une paire. Plusieurs paires se formeront à basse température lorsque l'énergie thermique est faible devant l'énergie d'appariement, à condition que l'interaction attractive compense la répulsion coulombienne. L'instabilité de la mer de Fermi à la formation d'une paire de Cooper est le moteur de la condensation des électrons dans un état quantique macroscopique. Pourquoi ?

La réponse vient de la théorie BCS qui a montré que la fonction d'onde de l'état fondamental du système est la superposition cohérente d'état à une particule :

$$\Psi_{BCS} = \prod (|u_k| + |v_k| e^{i\varphi} C_k^+ C_{-k}^+) \Psi_{Fermi}$$

où u_k^2 est la probabilité que l'état de paire $(-k, +k)$ soit vide et v_k^2 qu'il soit occupé. φ est la phase de la fonction d'onde de chaque électron et $C_k^+ C_{-k}^+$ les opérateurs de création d'un électron avec un vecteur d'onde k et $-k$ respectivement. Ψ_{Fermi} est la fonction d'onde de la mer de Fermi. Les coefficients u_k et v_k , appelés facteurs de cohérence, peuvent être déterminés en minimisant l'énergie de l'état fondamental du système. On obtient :

$$v_k^2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\xi_k}{\sqrt{\Delta^2 + \xi_k^2}} \right) \quad u_k^2 = 1 - v_k^2$$

Où $\xi_k = \epsilon_k - E_F$ et

$$\Delta \approx 2\hbar\omega_c e^{-1/N(E_F)V}$$

où $\hbar\omega_c$ est une énergie de coupure. Ayant l'expression de Ψ_{BCS} , il est facile de calculer l'énergie de condensation, c'est à dire la différence d'énergie interne entre l'état supraconducteur et l'état normal :

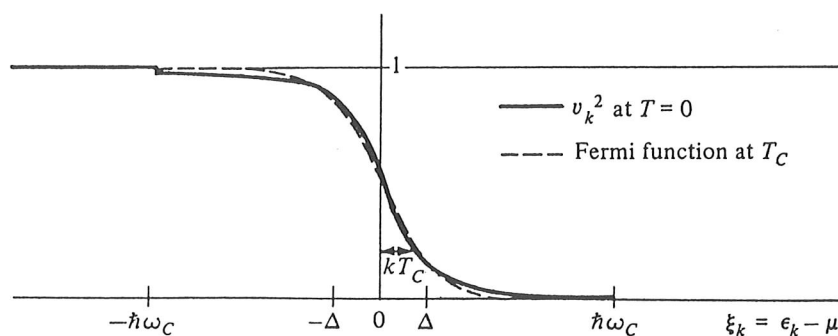
$$U_s(0) - U_n(0) = -\frac{1}{2} N(E_F) \Delta^2$$

On peut donc constater que la condensation des paires dans l'état supraconducteur baisse l'énergie totale du système. La construction de la fonction d'onde BCS et les résultats auxquels elle emmène représentent une des grandes réussites de la théorie de la matière condensée. Dans tout autre domaine, c'est aussi grâce à construction de la fonction d'onde de l'état fondamental que l'effet Hall quantique a pu être compris.

L'origine microscopique de l'interaction attractive entre électrons est à rechercher pour les supraconducteurs conventionnels dans l'interaction électron-phonon. En effet, on peut montrer que pour des fréquences proches de la fréquence de Debye l'interaction électron-phonon surécrante l'interaction coulombienne et produit une interaction nette attractive. L'image simple pour comprendre cet effet est la suivante : un premier électron (+k) polarise localement le réseau cristallin qui attire un second électron (-k) qui voyage en sens opposé. Ce mécanisme n'est efficace que parce que le mouvement des ions est beaucoup plus lent que celui des électrons. Cela traduit l'effet que l'interaction est attractive uniquement pour des fréquences de phonons proches de la fréquence de Debye. Il est aussi important de noter que l'interaction est à courte portée. L'origine microscopique du mécanisme d'appariement permet de donner un sens physique à l'énergie de coupure $\hbar\omega_c$ introduite dans l'expression de Δ . $\hbar\omega_c$ est l'énergie caractéristique d'excitation des phonons, $\hbar\omega_D$.

2.D. Echelles d'énergie et longueurs caractéristiques.

2Δ représente le gain d'énergie par paire de Cooper et définit l'énergie autour du niveau de Fermi sur laquelle les électrons sont appariés. Cela est montré en Fig.3 par la dépendance de la probabilité d'occupation d'une paire, v_k^2 , en fonction de l'énergie des électrons. Il est important de remarquer qu'il y a toujours des électrons au niveau de Fermi et que Δ est bien plus petit que $\hbar\omega_D$. Sachant que les valeurs typiques pour le produit $N(E_F)V$ et pour l'énergie de Debye sont respectivement 0.2-0.4 et 300-400 K, on trouve que les valeurs caractéristiques de Δ sont 0.1-1 meV.



Plot of BCS occupation fraction v_k^2 vs. electron energy measured from the chemical potential (Fermi energy). To make the cutoffs at $\pm\hbar\omega_c$ visible, the plot has been made for a strong-coupling superconductor with $N(0)V = 0.43$. For comparison, the Fermi function for the normal state at T_c is also shown on the same scale, using the BCS relation $\Delta(0) = 1.76kT_c$.

Fig.3

Les fluctuations thermiques détruisent les paires de Cooper. La température critique sera donc de l'ordre de Δ/K_B . Un des succès de la théorie BCS a été de déterminer la relation exacte entre T_c et Δ : $\Delta = 1.73 T_c$. Il est intéressant de remarquer que l'énergie de condensation par particule est l'ordre de $\Delta^2/E_F \approx 1 \mu\text{eV}$ est très petite devant l'énergie cinétique des électrons de conduction.

Si Δ est l'énergie caractéristique de formation d'une paire on peut estimer sa taille en utilisant le principe d'incertitude. On trouve

$$\xi_0 = \frac{\hbar v_F}{\Delta}$$

ξ_0 définit l'échelle minimum sur laquelle l'appariement peut être modifié, et est appelée longueur de cohérence. D'une façon plus intuitive on pourrait dire que ξ_0 indique la « portée » de la supraconductivité (à ne pas confondre avec la portée de l'interaction). Etant $v_F \approx 10^8 \text{ cm/sec}$ et $\Delta = 0.1 - 1 \text{ meV}$, la longueur de cohérence peut atteindre des valeurs assez élevées, jusqu'à plusieurs μm . Puisque ξ_0 est bien plus grande que la distance moyenne entre électrons, dans le rayon d'une paire de Cooper sont contenues des millions de paires. Ceci valide l'hypothèse BCS d'utiliser une théorie de champ moyen et garantit que l'appariement et la cohérence de phase se produisent à la même température.

3. Les Tests

3.A. Les excitations élémentaires : la spectroscopie tunnel.

Nous avons montré qu'il existe un cadre théorique pour rendre compte de la supraconductivité. Ce cadre décrit la condensation des électrons et l'origine microscopique des corrélations. La cohérence de phase du condensat superfluide (φ) et l'énergie caractéristique de formation des paires (Δ) sont les deux points clés de la théorie ainsi que l'identification de l'interaction attractive due au couplage électron-phonon. Mais quelles sont les preuves expérimentales pour φ et Δ ? L'effet tunnel nous permet de répondre à cette question.

Un peu d'intuition permet d'introduire le concept de quasiparticule (QP). Si Δ était nul, la probabilité d'occupation d'une paire serait celle du métal normal à température nulle. On peut donc imaginer de remplacer la relation de dispersion ϵ_k du métal normal avec la relation $E_k = \sqrt{\Delta^2 + \xi_k^2}$ qui apparaît dans l'expression de v_k . Les excitations E_k sont appelées quasiparticules et correspondent à une combinaison linéaire des excitations de type électron et de type trou du métal normal. Il est important de remarquer que la condensation des électrons a tellement modifié l'état fondamental du système qu'une excitation n'est plus ni un électron ni un trou mais une QP. En mémoire de son origine, une QP a une probabilité u_k^2 ou v_k^2 d'être une excitation de type-électron ou de type-trou respectivement. Puisque les facteurs de cohérence dépendent de l'énergie, cette probabilité dépend de l'énergie. A titre d'exemple, si $E_k = \Delta$ la QP est 50% électron et 50% trou ; si $E_k = 2\Delta$ la QP avec un vecteur d'onde $k_+ > k_F$ ($k_- < k_F$) est à 93 % électron (trou) et à 7% trou (électron). Au-dessus de 2Δ les QP peuvent être regardées comme des quasi-électrons ou des quasi-trous. La relation de dispersion $E_k = \sqrt{\Delta^2 + \xi_k^2}$ est représentée en

Fig.4. Δ est le gap d'excitation dans le spectre des QPs . Cela parait naturel car 2Δ est l'énergie qu'il faut fournir au système pour briser une paire de Cooper.

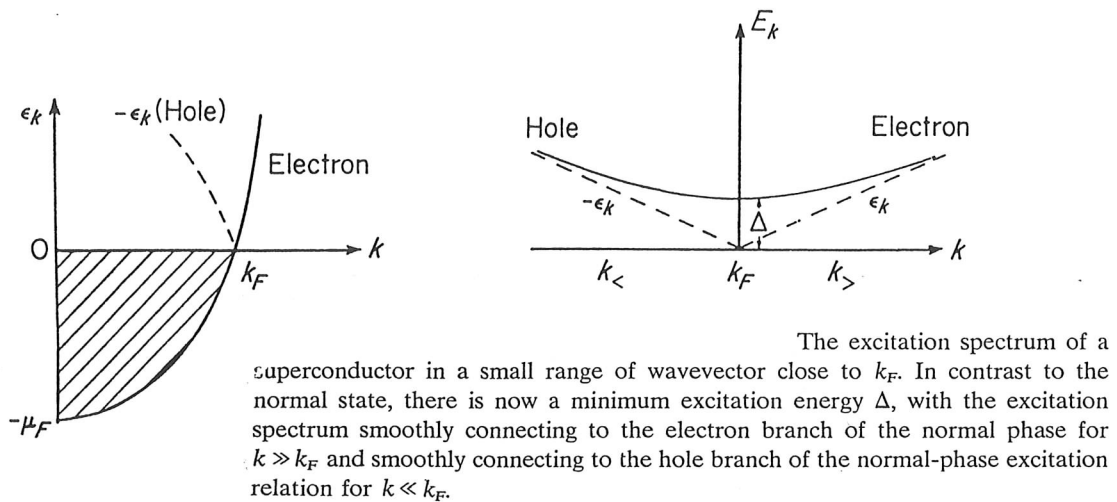


Fig.4

Une conséquence de la théorie de BCS est le changement radicale de la densité d'état des excitations élémentaires au E_F .

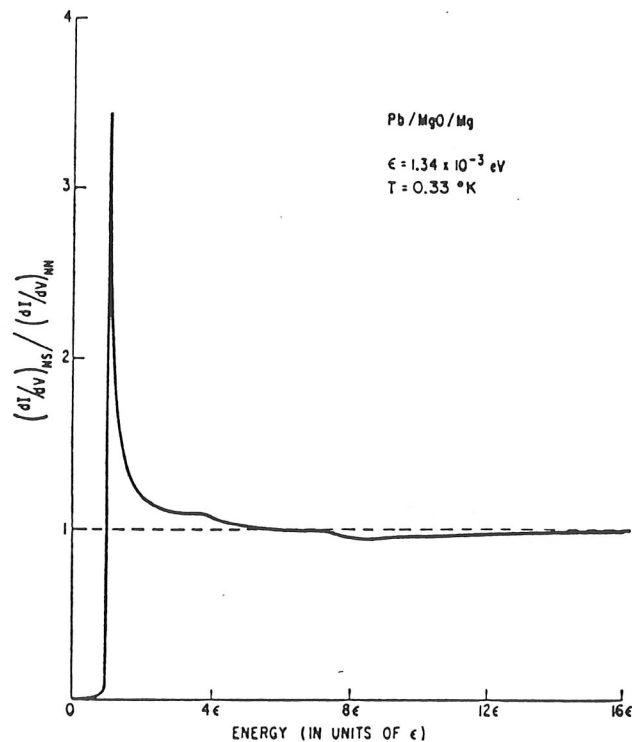
$$\frac{N_s(E)}{N_n(E_F)} = \frac{E}{\sqrt{(E^2 - \Delta^2)}}$$

La densité d'état des QPs et par conséquent le gap dans le spectre d'excitations peuvent être mesurés directement par effet tunnel. Pour des jonctions tunnel métal/isolant/supraconducteur, le courant est proportionnel à la densité d'état des deux électrodes. Pour des énergies comparables au gap supraconducteur, la densité d'état du métal normal est constante et la dérivée du courant tunnel en fonction de la tension de polarisation de la jonction donne directement la densité d'états de QP du supraconducteur. A température finie, des QPs sont créées par les fluctuations thermiques et la conductance tunnel devient :

$$G = G_{nn} \int \frac{E}{\sqrt{E^2 - \Delta^2}} \left(-\frac{\partial f(E - eV)}{\partial (eV)} \right) dE$$

f est la fonction de Fermi et définit la probabilité d'avoir, à la température T , une excitation d'énergie E_k . La spectroscopie tunnel permet d'atteindre une très grande résolution en énergie. Il est intéressant de remarquer que la probabilité tunnel pour des bonnes barrières isolantes est très

faible 10^{-6} . Donc, la mesure n'altère pas les propriétés du supraconducteur. En effet, l'injection massive d'électrons perturberait l'état fondamental BCS. En Fig.5 La densité d'état du Pb à $T=0.3$ K est présentée. Le gap supraconducteur à 1.34 meV est clairement identifié. Les structures à 6.7 meV et 9.7 meV correspondent au spectre d'excitations des phonons. L'effet tunnel permet de tester l'existence d'un gap dans le spectre d'excitation, mais permet aussi de vérifier que l'origine microscopique de l'appariement est l'interaction électron-phonon



Differential conductance of a Pb-Mg junction vs. voltage, showing the superconducting density of states of Pb (64).

Fig.5

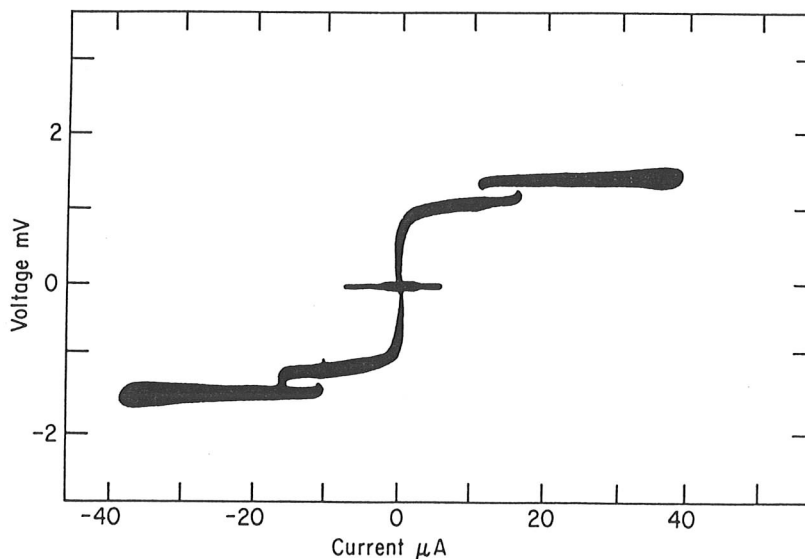
3.B La cohérence de phase : l'effet Josephson

L'effet tunnel dont nous avons parlé dans le paragraphe précédent est l'effet tunnel à une particule. En 1962 B. D. Josephson a montré que lorsque le métal normal de la jonction tunnel est remplacé par un deuxième supraconducteur, la probabilité tunnel pour une paire de Cooper est la même que celle d'un seul électron. Cet effet est une manifestation directe de la cohérence de phase du condensat. La relation phase-courant à travers la barrière isolante est :

$$J = J_c \sin(\varphi_1 - \varphi_2)$$

où $\varphi_1 - \varphi_2$ est la différence de phase entre les deux supraconducteurs. Cette relation indique que si le courant imposé est inférieur au courant critique, la jonction se comporte comme un supraconducteur. A la différence d'un supraconducteur homogène la densité de supercourant n'est pas reliée au gradient de la phase mais à la différence de phase entre les deux

supraconducteurs. En d'autres termes, imposer un supercourant à une jonction Josephson revient à fixer la différence de phase entre les supraconducteurs. Le courant critique Josephson peut être déterminé directement par la mesure de la caractéristique courant-tension de la jonction (voir Fig.6). La valeur de I_c est donnée par $I_c = (2h/eR_N) \Delta_1 \Delta_2 / (\Delta_1 + \Delta_2)$. Pour $\Delta = 1 \text{ meV}$ et des résistances de jonction typiques $R_N = 1-100 \Omega$, on trouve $I_c = 1 \text{ mA} - 10 \mu\text{A}$. L'effet d'un champ magnétique est d'introduire un déphasage long de la jonction. Ce déphasage produit des modulations du courant critique en fonction du champ appliqué. Une jonction Josephson peut donc être utilisée pour mesurer un champ magnétique. En fait la sensibilité au champ est fortement augmentée en fabricant des dispositifs à base de jonctions Josephson plus complexes.



The original published report of the current-voltage relation between two superconductors. The current, here plotted horizontally, rises at the sum energy gap of aluminum and lead, and also at $V = 0$, showing for the first time the Josephson supercurrent and quasiparticle current in the same tunnel junction. (After Nicol, Shapiro, and Smith, 1960.)

Fig.6

4. Les systèmes réels

4. A. Les collisions élastiques.

Nous avons construit l'état fondamental BCS à partir de paires de Cooper $(-k, +k)$. Dans des systèmes réels l'impulsion peut ne plus être un bon nombre quantique car les diffusions détruisent le caractère ballistique des excitations. Si le libre parcours moyen l est plus grand que la longueur de cohérence (« limite propre ») on pourra toujours définir une paire sur une longueur plus petite que l et la supraconductivité ne sera pas affectée par un libre parcours moyen fini. En principe, la situation pourrait être différente lorsque $l < \xi_0$ (« limite sale ») car la longueur caractéristique du transport devient plus petite que celle de la supraconductivité. En fait P.W.

Anderson a montré que dans cette limite, les paires de Cooper ne sont plus formées par les états $(-k, +k)$, mais par des états (ψ, ψ^*) symétriques par rapport au renversement du temps. Ces états décrivent deux électrons qui parcourent la même trajectoire en sens opposé. La supraconductivité et par conséquent la température critique, ne sont pas affectés par le désordre. Par contre la longueur de cohérence devient $\xi^{-1} = \xi_0^{-1} + I^{-1}$

4.B. Comment réduire la T_c : le dépairage.

Lors qu'une perturbation interne ou externe au système brise la symétrie temporelle des états (ψ, ψ^*) l'appariement est affaibli. Cela est dû au fait que l'état fondamental BCS est dégénéré par rapport à l'inversion du temps. Si une perturbation enlève cette dégénérescence les paires sont brisées. L'énergie caractéristique associée à la perturbation est l'énergie de dépairage. Deux exemples : l'effet des impuretés magnétiques et des supercourants. Une impureté magnétique renverse le spin des électrons et produit des états qui ne sont plus symétriques par rapport au renversement du temps. L'énergie de dépairage est l'énergie d'échange spin-spin, J . Egalement, un supercourant brise la symétrie temporelle des états (ψ, ψ^*) à cause de l'effet Doppler. L'énergie caractéristique de dépairage est le produit $v_F p_F$. On peut décrire la suppression de la température critique par un mécanisme de dépairage d'une façon universelle

$$\ln \frac{T_c}{T_{c0}} = \Psi\left(\frac{1}{2}\right) - \Psi\left(\frac{1}{2} + \frac{E_c}{2\pi K_B T_c}\right)$$

Il est assez facile de se convaincre que la supraconductivité est détruite pour $2E_c > \Delta$. Cela correspond à introduire une perturbation de l'état fondamentale plus grande que son énergie. En d'autres termes le dépairage peut être vu comme une perte de la cohérence de phase entre les états d'une paire. E_c est l'inverse du temps nécessaire à détruire cette cohérence. Si E_c est plus petit que le temps d'appariement, \hbar/Δ , la supraconductivité est complètement détruite.

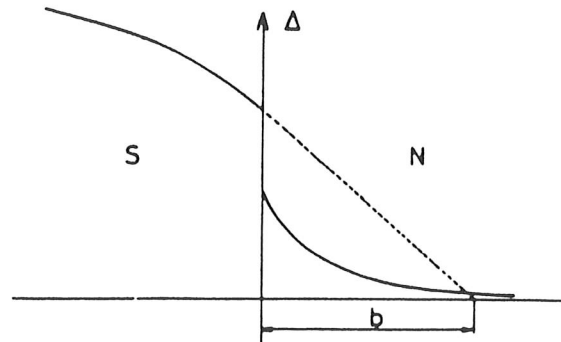
4.C. Les effets de taille finie

D'autres mécanismes peuvent réduire la T_c . L'effet de proximité en fournit un exemple. En Fig. 7 nous présentons la fonction de paire en fonction de la distance de l'interface d'un bilame supraconducteur/métal normal. Le paramètre d'ordre dans le supraconducteur est fortement abaissé à l'interface. Si l'on imagine de réduire l'épaisseur du supraconducteur et du métal à des valeurs inférieures à la longueur de cohérence, la température critique du bilame sera plus faible que celle du supraconducteur homogène. Un traitement rigoureux de l'effet de proximité est possible aujourd'hui grâce au formalisme développé à partir des équations d'Usadel. La T_c du bilame est déterminée par l'épaisseur du normal, l'épaisseur du supraconducteur et la transparence de l'interface.

$$K_B T_c = 1.14 \hbar \omega_D e^{-1/\eta} \quad \text{où} \quad \eta = \frac{V_1 N_1^2 d_1 + V_2 N_2^2 d_2}{N_1 d_1 + N_2 d_2}$$

Dans le but d'abaisser la T_c du matériau, l'intérêt d'utiliser un système inhomogène est technique et fondamental à la fois. Technique car il permet un contrôle très fin des variations de T_c . Fondamental car le bilame est équivalent à un supraconducteur à couplage plus faible. L'effet

du normal étant de redéfinir l'énergie de formation des paires, la forme de la densité d'états à basse énergie ($E \ll \Delta$) est peu modifiée par rapport à celle attendue pour un supraconducteur homogène. En revanche, des impuretés magnétiques introduisent un temps de vie fini des paires qui se manifeste par une densité d'états presque normale.



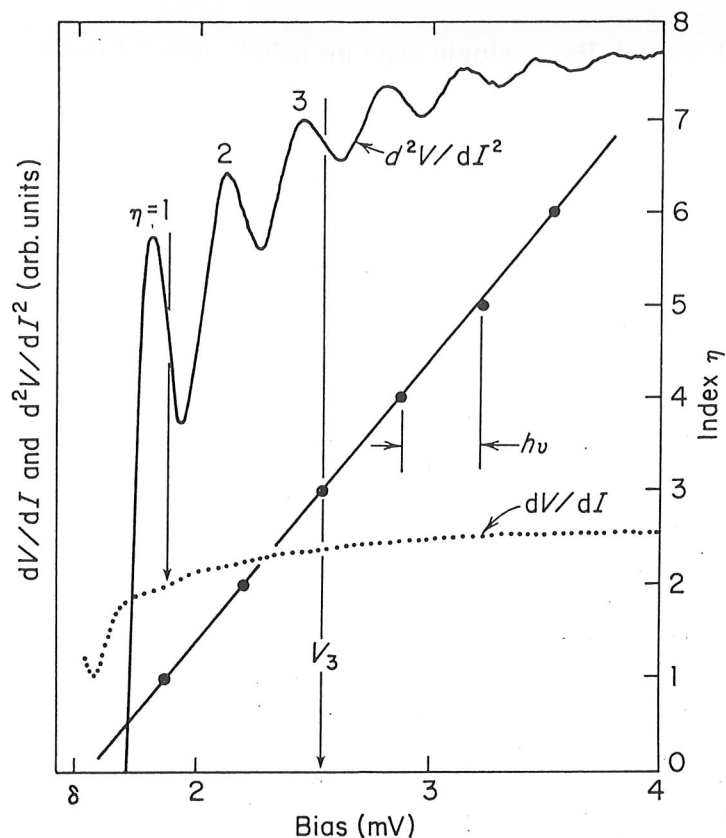
Shape of the order parameter Δ , in 0 field, in the vicinity of an S-N interface. The temperature is assumed to be close to T_{cNS} , the transition temperature of the compound system. Note that Δ is *not* described by a single exponential on the N side. The length b is the “extrapolation length.”

Fig.7

L'effet de proximité peut être utilisé aussi pour confiner les QPs. Une QP d'énergie inférieure au gap supraconducteur qui pénètre dans le métal normal est piégée par effet des réflexions multiples à l'interface supraconducteur/métal. Ce piège augmente la probabilité tunnel de la QP si une jonction est déposée sur le métal. Une probabilité qui est autant plus grande que l'épaisseur de métal et la résistance de la jonction sont faibles. Le piège amplifie l'efficacité de la détection de QPs par une jonction tunnel. Pour que ce mécanisme soit efficace, il faut que $v\tau_R$, où τ_R est le temps de recombinaison, soit plus grand que la taille de l'échantillon, i.e. que la QP soit piégée avant de se recombiner avec une autre QP pour former une paire. Quelle est la valeur de v ? La vitesse des QPs peut être mesurée directement par l'effet Tomasch. L'effet Tomasch montre que des interférences constructives entre excitations dans le supraconducteur donnent lieu à des résonances dans la densité d'état, mesurable par spectroscopie tunnel (voir Fig.8). L'énergie de ces résonances est donnée par la relation suivante :

$$E_i = \sqrt{\Delta^2 + \left(\frac{ihv}{2d}\right)^2}$$

où d est l'épaisseur du supraconducteur. Typiquement on trouve $v \approx v_F$.



Original report of oscillatory behavior in dV/dI and d^2V/dI^2 for an Al-Al₂O₃-Pb tunnel diode measured at 1.1 K. The thickness of the lead layer is 4.3 μm , and the energy spacing of the oscillations was found to vary inversely as the thickness of the lead layer. (After Tomasch, 1965a.)

Fig.8

5. Chaleur spécifique et transport de la chaleur

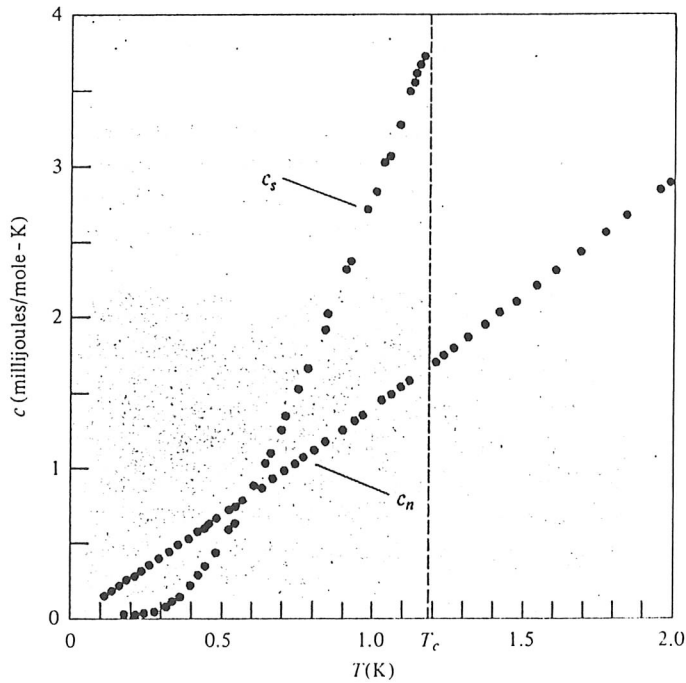
5.A. Chaleur spécifique

La chaleur spécifique d'un gaz d'électrons peut être calculée directement à partir de l'expression de l'énergie interne $u = (2/V) \sum \epsilon_k f_k$: c'est la distribution statistique des électrons qui détermine les propriétés thermodynamiques du système. Etant $c_v = (\partial u / \partial T)_v$, on trouve

$$c_v = \frac{\pi^2}{3} K_B^2 T N(E_F)$$

Ce résultat est assez intuitif. L'augmentation de l'énergie interne du système électronique est due à l'excitation d'électrons au-dessus du niveau de Fermi. Le nombre de ces électrons est de l'ordre de $N(E_F)K_B T$ et le gain d'énergie $K_B T$, d'où $u \approx (K_B T)^2 N(E_F)$. La chaleur spécifique est proportionnelle à la densité d'états au niveau de Fermi. Dans un supraconducteur, elle doit être fortement modifiée par le gap dans le spectre d'excitation. Il est important de remarquer que ce sont les excitations qui contribuent à l'énergie interne, donc les QPs et pas les électrons comme

dans un métal normal. Par analogie avec un métal normal l'énergie interne du supraconducteur est $u=(2/V) \sum E_k f_k$. Après quelques calculs on peut montrer que C_{es} est la somme de deux termes non analytiques. Un premier qui tient compte de la distribution en énergie des QPs en fonction de la température. Un deuxième qui décrit l'effet de la dépendance du gap en fonction de la température sur les niveaux du système. Ces deux termes dépendent exponentiellement de la température à $T \ll T_c$. Des mesures de la chaleur spécifique de l'Al en fonction de la température sont présentées en Fig. 9. L'accord avec les prévisions théoriques est remarquable.



Low-temperature specific heat of normal and superconducting aluminum. The normal phase is produced below T_c by application of a weak (300-gauss) magnetic field, which destroys the superconducting ordering but has otherwise negligible effect on the specific heat. The Debye temperature is quite high in aluminum, so the specific heat is dominated by the electronic contribution throughout this temperature range (as can be seen from the fact that the normal-state curve is quite close to being linear). The discontinuity at T_c agrees well with the theoretical prediction (34.22) [$c_s - c_n$]/ $c_n = 1.43$. Well below T_c , c_s drops far below c_n , suggesting the existence of an energy gap. (N. E. Phillips, *Phys. Rev.* **114**, 676 (1959).)

Fig.9

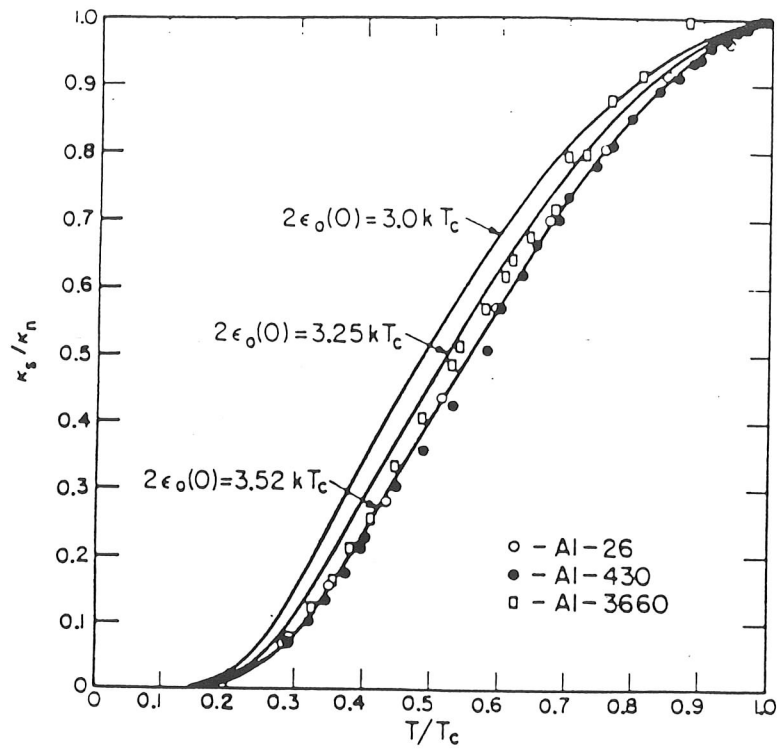
5.B. Le transport de la chaleur

Pour terminer, nous remarquons que contrairement au transport électrique, le transport de la chaleur n'est pas assuré par le condensat qui est caractérisé par une entropie nulle, mais par les QPs. La conductivité thermique est directement reliée à la chaleur spécifique :

$$J_Q = \frac{1}{3} v_F^2 \tau (-\nabla T)$$

Etant une propriété de transport, elle dépend aussi de la vitesse des QPs et de leur temps de relaxation. Il est intéressant de noter que la mesure de la conductivité thermique et de la chaleur

spécifique permet de déterminer la vitesse des QPs et le temps de relaxation même dans l'état supraconducteur. Des mesures de conductivité thermique pour l'Al sont présentées en Fig. 10.



Measured ratio of the superconducting to the normal thermal conductivity for aluminium. The theoretical curves are shown for the indicated values of the gap width $2\Delta(0)$ at $T=0$. [After Satterthwaite (153).]

Fig. 10

6. Annexes

Table 34.2
VALUES OF T_c AND H_c FOR THE
SUPERCONDUCTING ELEMENTS^a

ELEMENT		T_c (K)	H_c (GAUSS) ^b
Al		1.196	99
Cd		0.56	30
Ga		1.091	51
Hf		0.09	—
Hg	α (rhomb)	4.15	411
	β	3.95	339
In		3.40	293
Ir		0.14	19
La	α (hcp)	4.9	798
	β (fcc)	6.06	1096
Mo		0.92	98
Nb		9.26	1980
Os		0.655	65
Pa		1.4	—
Pb		7.19	803
Re		1.698	198
Ru		0.49	66
Sn		3.72	305
Ta		4.48	830
Tc		7.77	1410
Th		1.368	162
Ti		0.39	100
Tl		2.39	171
U	α	0.68	—
	γ	1.80	—
V		5.30	1020
W		0.012	1
Zn		0.875	53
Zr		0.65	47

^a For type II superconductors, the zero-temperature critical field quoted is obtained from an equal-area construction: The low-field ($H < H_{c1}$) magnetization is extrapolated linearly to a field H_c chosen to give an enclosed area equal to the area under the actual magnetization curve.

^b At $T = 0$ (K).

Sources: B. W. Roberts, *Progr. Cryog.* 4, 161 (1964); G. Gladstone, M. A. Jensen, and J. R. Schrieffer, *Superconductivity*, R. D. Parks, ed., Dekker, New York, 1969; *Handbook of Chemistry and Physics*, 55th ed., Chemical Rubber Publishing Co., Cleveland, 1974–1975.

Park 5

TABLE I

Experimental Values of $N(0)V$ Compared with the Theoretical Calculation of Morel and Anderson (9)

Element	$T_c^{\text{expt}}, ^\circ\text{K}$	$\theta_D, ^\circ\text{K}$	$N(0)V_{\text{calc}}$	$N(0)V_{\text{expt}}$
Zn	0.9	235	0.16	0.18
Cd	0.56	164	0.14	0.175
Hg	4.16	70	0.27	0.35
Al	1.2	375	0.23	0.175
In	0.4	109	0.24	0.29
Tl	2.4	100	0.23	0.27
Sn	3.75	195	0.24	0.25
Pb	7.22	96	0.30	0.39
Ti	0.4	430	0.30	0.14
Zr	0.55	265	0.26	0.16
V	4.9	338	0.35	0.24
Nb	8.8	320	0.35	0.32
Ta	4.4	230	0.34	0.25
Mo	0.92	360	0.28	0.16
U	1.1	200	0.35	0.19
	$T_c^{\text{calc}}, ^\circ\text{K}$			
Na	7.3×10^{-2}	160	0.13	
K	4.5×10^{-2}	100	0.13	
Cu	1.5×10^{-2}	343	0.10	
Au	6×10^{-4}	164	0.08	
Mg	2.3	342	0.20	
Ca	0.42	220	0.16	

^a For the last six elements, superconductivity has not been observed. The value for T_c in the table represents the calculated transition temperature assuming Morel and Anderson's value for $N(0)V$ and the simple BCS relation $T_c \approx 0.85\theta_D \exp[-1/N(0)V]$.

Table 2.1
FERMI ENERGIES, FERMI TEMPERATURES, FERMI WAVE VECTORS, AND FERMI VELOCITIES FOR REPRESENTATIVE METALS^a

ELEMENT	r_s/a_0	ϵ_F	T_F	k_F	v_F
Li	3.25	4.74 eV	5.51×10^4 K	1.12×10^8 cm ⁻¹	1.29×10^8 cm/sec
Na	3.93	3.24	3.77	0.92	1.07
K	4.86	2.12	2.46	0.75	0.86
Rb	5.20	1.85	2.15	0.70	0.81
Cs	5.62	1.59	1.84	0.65	0.75
Cu	2.67	7.00	8.16	1.36	1.57
Ag	3.02	5.49	6.38	1.20	1.39
Au	3.01	5.53	6.42	1.21	1.40
Be	1.87	14.3	16.6	1.94	2.25
Mg	2.66	7.08	8.23	1.36	1.58
Ca	3.27	4.69	5.44	1.11	1.28
Sr	3.57	3.93	4.57	1.02	1.18
Ba	3.71	3.64	4.23	0.98	1.13
Nb	3.07	5.32	6.18	1.18	1.37
Fe	2.12	11.1	13.0	1.71	1.98
Mn	2.14	10.9	12.7	1.70	1.96
Zn	2.30	9.47	11.0	1.58	1.83
Cd	2.59	7.47	8.68	1.40	1.62
Hg	2.65	7.13	8.29	1.37	1.58
Al	2.07	11.7	13.6	1.75	2.03
Ga	2.19	10.4	12.1	1.66	1.92
In	2.41	8.63	10.0	1.51	1.74
Tl	2.48	8.15	9.46	1.46	1.69
Sn	2.22	10.2	11.8	1.64	1.90
Pb	2.30	9.47	11.0	1.58	1.83
Bi	2.25	9.90	11.5	1.61	1.87
Sb	2.14	10.9	12.7	1.70	1.96

^a The table entries are calculated from the values of r_s/a_0 given in Table 1.1 using $m = 9.11 \times 10^{-28}$ grams.

TABLE III
Measured Values of $2\Delta(0)/kT_c$
(BCS) theoretical value = 3.53)

Superconductor	Tunneling measurements	Ref.	Thermodynamic measurements ^a
Al	4.2 ± 0.6	(49)	3.53
	2.5 ± 0.3	(50)	
	2.8 — 3.6	(68)	
	3.37 ± 0.1	(65)	
Cd	3.2 ± 0.1	(65a)	3.44
Ga			3.52, 3.50, 3.48
Hg(α)	4.6 ± 0.1	(84)	3.95
In	3.63 ± 0.1	(49)	3.65
	3.45 ± 0.07	(65)	
	3.61	(94)	
La	1.65 — 3.0 (fcc) ^b	(100)	3.72 (fcc) (<i>d</i> -hep)
	3.2	(100)	
Nb	3.84 ± 0.06	(85)	3.65
	3.6	(95)	
	3.6	(96)	
Pb ^c	4.29 ± 0.04	(69)	3.95
	4.38 ± 0.01 ^d	(74)	
Sn	3.46 ± 0.1	(49)	3.61, 3.57
	3.10 ± 0.05	(50)	
	3.51 ± 0.18	(85)	
	2.8 — 4.06	(65)	
Ta	3.1 — 4.3	(87)	3.63
	3.60 ± 0.1	(85)	
	3.5	(95)	
Tl	3.65 ± 0.1	(97)	3.63
	3.57 ± 0.05	(98)	
	3.9	(94)	
V	3.4	(95)	3.50
Zn	3.2 ± 0.1	(99)	3.44

^a The values given here were calculated from values of $\gamma T_c^2/V_M H_c^2(0)$ assuming the equation $[2\pi V_M H_c^2(0)/3\gamma T_c^2]^{1/2} = 2\Delta(0)/kT_c$.

^b The measured tunneling results of Edelstein and Toxen (100) in La are very low and widely scattered and perhaps reflect the great structure sensitivity of La. Hauser's (100a) later measurements are higher and less scattered.

^c Other older measurements are collected in (51).

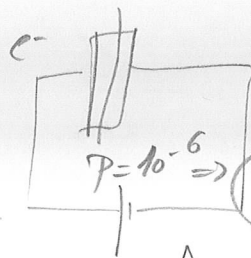
^d T_c assumed to be 7.193 °K.

TABLE VI
Theoretical Penetration Depth at $t=0$, $\lambda(0)$ compared with Experiment λ_0

Metal	$\lambda_L(0) \times 10^6$	$\xi_0 \times 10^6$	$\frac{\xi_0}{\lambda_L(0)}$	$\frac{\lambda(0)}{\lambda_L(0)}$	$\lambda(0) \times 10^6$ (random scattering)	$\lambda_0 \times 10^6$ (observed)
Sn	3.4	23	6.2	1.5	5.1	5.1
Al	1.6	160	100	3.3	5.3	4.9, 5.15
Pb	3.7	8.3	2.2	1.25	4.4	3.9
Cd	11.0	76	6.9	1.6	17.5	13
Nb	3.9	3.8	0.98	1.15	4.5	4.4

^a See (4) and (225) for complete references and (209) for Nb.

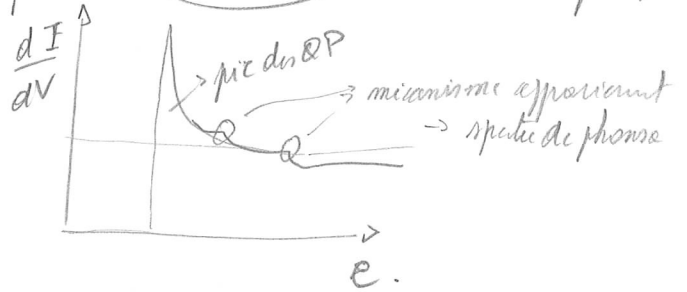
Spalte tunnel
 $1\text{nm} \times 1\text{nm} \times 220\text{\AA}$
 $2eV$
 $R \sim 1-1k\Omega$
 Aluminium



$$\frac{dI}{dV} = G_0 \int N_{S_1}(E) \left(-\frac{\partial f}{\partial E} \right) dE$$

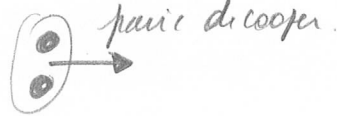
↳ conduction per spate Fermi

I. Giaever et al, Phys Rev 126, 941 (1962)



Jonction Josephson

SIS



$$J = J_c \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \quad \text{① } J_c \text{ en } \mu\text{W}$$

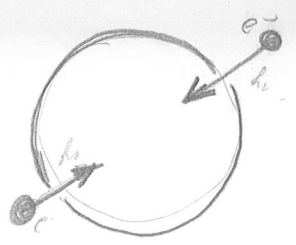
$$J_c R_n \sim \Delta \rightarrow R_n \sim 1-100\Omega \Rightarrow J_c \sim \underline{\underline{10\mu A - 1mA}} \quad \triangle \# \text{ Bulk.}$$

Augement de cooper \Rightarrow interaction specifi de Fermi \div attraction des e^- .

i) $P_1 + P_2 = 0$

ii) singulet

$$E = 2E_F - 2\hbar\omega_c \cdot e^{-2/N(E_F)V}$$



$\Psi_0 = \sum_k g_k e^{ik_1 r_1} e^{-ik_2 r_2}$ hypocooper $V_{kk'} = -V \quad E < \hbar\omega_c$
 $0 \quad E > \hbar\omega_c$

$\sum_k g_k \cos k \cdot (q_1 - q_2) \cdot \begin{pmatrix} \beta_1 \alpha_1 & \beta_2 - \alpha_2 \beta_1 \\ \uparrow & \downarrow \end{pmatrix}$
 solution $(E - 2\epsilon_k) g_k = \sum_{k' > \hbar\omega_c} V_{kk'} g_{k'}$

BCC $\Psi_{\text{BCC}} = \prod_k (|u_k| + |v_k| e^{i\phi}) c_{e\uparrow}^\dagger c_{-k}^\dagger \Psi_0$

Energy gap: $U_S(T=0) - U_N(T=0) = -\frac{1}{2} N(e_F) \Delta^2$ très petite 99 meV.

Etat fondamental quantique? \div oui veut-ce. non: idem $(3H_c)$

Expl. de l'origine attractive

$V_{c-ph} = V_{c-e} \cdot \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_p^2}$ dit si $\omega < \omega_D$ chye.

$V = V_{c-c} + V_{c-p} = V_{c-e} \cdot \left(1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_D^2 - \omega^2}\right)$

$\omega < \omega_D$ relative avec $\epsilon(\omega)$ diélectrique?

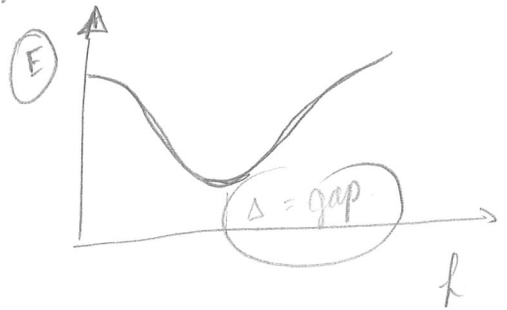
$\omega < \omega_D$ en isolation en métaux: interaction quantique par les oxydes car sont covalents part \rightarrow anti-magnon.

Energy cut: $\hbar\omega_c \rightarrow \hbar\omega_D \Rightarrow \Delta = \hbar\omega_D \cdot e^{-\frac{1}{N(E_F)V}}$
 \hookrightarrow debye

on BT min NTC peu bip. elation.

$N(E_F) \cdot V \approx 0.2 \div 0.4$
 $\hbar\omega_c \approx 300 \div 400 K$ | $\Delta \approx 0.1 \div 1 meV$
 non: $\Delta \ll \hbar\omega_D \ll E_F$

longueur de coherence \rightarrow taille d'une paire $\sim 1000 \text{ \AA}$ \Rightarrow échelle variation coherence de phase.



spectre exciton